MATEMATICA

Problemi e limiti delle previsioni

Don Mason/Corbis

Perché l'evoluzione di alcuni fenomeni, come i moti degli oggetti celesti, è più facile da prevedere rispetto a quella di altri, per esempio l'andamento dei titoli quotati in borsa?

di Angelo Vulpiani

IN BREVE

Per effettuare previsioni in modo ottimale si devono individuare le variabili rilevanti e le leggi di evoluzione che ne regolano la dinamica. Ma anche se variabili e leggi sono note, possono esserci enormi problemi pratici.

Anche in ambito deterministico, in presenza di caos, cioè quando si ha una forte dipendenza dell'evoluzione dalle condizioni iniziali, ci sono limiti intrinseci nelle previsioni che diventano impossibili dopo un certo tempo caratteristico.

Se le equazioni di evoluzione non sono note si possono usare le serie storiche (i dati del passato) per prevedere il futuro. Ma anche in questo caso possono esserci difficoltà: spesso la serie, per quanto lunga, non basta.

I dati sono importanti ma, per quanto abbondanti, sono poco utili senza un robusto quadro teorico.

Angelo Vulpiani è professore ordinario di fisica teorica al Dipartimento di fisica della «Sapienza» Università di Roma. I suoi interessi di ricerca riguardano il caos e la complessità nei sistemi dinamici, la meccanica statistica e i fenomeni di trasporto.

Sui giornali si legge spesso di maghi della finanza o del meteo che avrebbero trovato metodi infallibili per prevedere il futuro. Anche se giustamente perplessi, in fondo siamo convinti che, almeno in alcuni casi, sia possibile fare previsioni. Questa speranza nasce dall'osservazione della regolarità di molti fenomeni (il giorno segue alla notte, le stagioni si susseguono). Lo dice anche la Bibbia: «Ciò che è stato sarà e ciò che si è fatto si rifarà; non c'è niente di nuovo sotto il Sole» (*Ecclesiaste*).

È ben noto fin dall'antichità che le eclissi possono essere previste con grande anticipo e precisione, non così il tempo meteorologico, e ancor meno il prezzo delle azioni in borsa. Perché questa grande differenza tra le eclissi da una parte e la meteorologia e la borsa dall'altra?

Il primo punto da capire è quali siano le variabili rilevanti per un dato fenomeno. Questo è un problema molto sottile: non è certo un caso che sia stato necessario aspettare Galileo Galilei e Isaac Newton per capire che la variabile «giusta» per il moto di un corpo non è solo la posizione ma anche la velocità.

Una volta stabilite le variabili giuste, per le previsioni si presentano diverse situazioni: le leggi di evoluzione esistono e si conoscono; le leggi di evoluzione esistono e non si conoscono; non sappiamo se le leggi di evoluzione esistono. Nel primo caso rientrano l'astronomia (le leggi sono date dalle equazioni di Newton e dalla legge di gravitazione) e le previsioni meteo (regolate dalle equazioni della fluidodinamica). Nella seconda categoria ci sono i terremoti: sicuramente descritti dalle leggi della teoria dell'elasticità, ma non conosciamo la composizione dei materiali all'interno della terra. L'economia è forse l'esempio più interessante della terza classe.

Determinismo

In prima approssimazione possiamo classificare le leggi di evoluzione in due grandi classi: deterministiche e probabilistiche. Per determinismo si intende che lo stato del sistema a un certo tempo determina univocamente lo stato a ogni tempo successivo. È ancora aperto il problema concettuale di come interpretare le leggi, se realmente esistenti o con una mera valenza descrittiva. Anche sulla dicotomia determinismo-probabilità ci sarebbe molto da dire: descriviamo il lancio di un dado in termini probabilistici, ma si potrebbe obiettare che un dado segue le leggi di Newton che sono deterministiche, in questo caso un approccio probabilistico sarebbe solo un artificio pratico. Al di là degli aspetti filosofici è importante sottolineare che anche in ambito probabilistico ci sono casi in cui le previsioni sono praticamente certe.

Parlando di determinismo è inevitabile citare il matematico e astronomo francese Pierre-Simon Laplace: «Dobbiamo dunque considerare lo stato presente dell'universo come effetto del suo stato anteriore e come causa del suo stato futuro. Un'intelligenza che, per un dato istante, conoscesse tutte le forze di cui è animata la natura e le posizioni rispettive degli esseri che la compongono, se per di più fosse abbastanza profonda per sottomettere questi dati all'analisi, abbraccerebbe nella stessa formula i movimenti dei più grandi corpi dell'universo e dell'atomo più leggero: nulla sarebbe incerto per essa e l'avvenire, come il passato, sarebbe presente ai suoi occhi».

Ovviamente il super matematico non esiste. Solo in poche situazioni la regola per l'evoluzione è nota esplicitamente, e sono i casi facili (quelli degli esercizi dei primi corsi universitari). Nelle situazioni più interessanti, quasi sempre la regola non è nota. Si potrebbe sperare che un supercomputer possa aiutarci a creare un super matematico (o almeno una sua buona approssimazione) capace di previsioni con la precisione desiderata. Negli anni cinquanta anche il grande John von Neumann ne era convinto, pensava sarebbe stato possibile prevedere (e addirittura controllare) il clima, ma si sbagliava: non aveva considerato il caos.

Dentro il caos

Cominciamo dal caso più semplice in cui le variabili che descrivono il fenomeno sono note e l'evoluzione è deterministica. Ovviamente si possono incontrare molte difficoltà pratiche, tra le quali: il sistema può essere molto «complicato»; ci può essere l'effetto farfalla, cioè l'evoluzione è molto sensibile a piccoli errori sullo stato iniziale.

> **I sistemi astronomici sono meno caotici dell'atmosfera, quindi è più facile prevedere le eclissi che non il tempo**

Come sistema «complicato» si può pensare a un siustema con molte variabili. Per esempio nei problemi meteorologici (*si veda l'articolo a p. XX*) l'ideale sarebbe un modello che includa la temperatura, le velocità del vento (e altre variabili) su una griglia molto fitta (diciamo con la distanza tra i nodi di un millimetro), ma questo non è possibile (in pratica la distanza dei nodi è qualche decina di chilometri in orizzontale e centinaia di metri in verticale). Quindi nella risoluzione numerica è necessaria una «modellizzazione» delle piccole scale, per non parlare dei problemi pratici per risolvere le equazioni. Saper controllare tutti questi aspetti per le previsioni meteo è un'arte estremamente sofisticata.

Ma le difficoltà non nascono solo dalla presenza di un numero molto elevato di variabili. Anche un sistema con poche variabili può essere caotico: un piccolo errore sulle condizioni iniziali viene amplificato velocemente (in modo esponenziale). Questo è quello che viene chiamato «effetto farfalla»: un'inevitabile incertezza sulla condizione iniziale implica l'impossibilità di predire in modo accurato il sistema dopo un tempo che è determinato dal cosiddetto esponente di Lyapunov λ (*si veda il box a p. XX*).

L'espressione «effetto farfalla» nasce dal titolo di un seminario, *Può il battito di ali di una farfalla in Brasile provocare un uragano in Texas?*, tenuto dal meteorologo Edward Lorenz nel 1979, ed è spesso fraintesa. Il significato corretto è che partendo da due situazioni iniziali quasi uguali (quella con il battito di ali della farfalla e quella senza) dopo qualche settimana si hanno situazioni meteo molto diverse, non necessariamente con un uragano.

L'esistenza di sistemi deterministici caotici fu compresa verso la fine del XIX secolo dal grande matematico francese Henri Poincaré. Negli anni sessanta del XX secolo Lorenz fu tra i primi ad andare oltre l'aspetto formale, mostrando l'impatto pratico del caos. Anche se l'atmosfera fosse descritta da un'equazione differenziale con solo tre variabili (ottenuta con drastiche semplificazioni delle vere equazioni), in presenza del caos le previsioni sarebbero impossibili, dopo un certo tempo.

Questo tipo di comportamento non è una patologia. Il caos è la regola, non l'eccezione; è presente ovunque in geofisica, astronomia, ottica, biologia, chimica e così via.

Tom Fox/Dallas Morning News/Corbis

Perché le eclissi si prevedono con grande anticipo, mentre le previsioni del tempo sono spesso errate? Forse gli astronomi sono più bravi dei meteorologi? La soluzione dell'apparente paradosso è molto semplice: i sistemi astronomici sono «poco caotici», cioè l'esponente di Lyapunov è molto piccolo, e quindi non è difficile prevedere le eclissi o il comportamento dei pianeti per tempi anche di milioni di anni. Al contrario il tempo caratteristico dell'atmosfera, cioè 1/λ, è solo di qualche giorno, si può cercare di guadagnare qualcosa migliorando la precisione sul dato iniziale (o l'algoritmo numerico di integrazione delle equazioni), ma sono dettagli che non cambiano molto il risultato per il tempo di predicibilità (*si veda il box a p. XX*).

Imparare dal passato

Non sempre le equazioni sono note, oppure lo sono solo in linea di principio, ma non trattabili neanche con un supercomputer. A volte non è conosciuto neanche il vettore di stato *x*, cioè le variabili che descrivono il fenomeno. Per ora ignoriamo questo problema che, almeno a livello formale, è stato risolto dal matematico olandese Floris Takens (*si veda il box in alto*).

Assumendo che il sistema sia regolato da leggi deterministiche (ignote), data la conoscenza dello stato del sistema fino a un tempo abbastanza lungo nel passato, possiamo inferire il futuro? Il metodo degli analoghi consiste nel cercare nel passato una situazione «vicina» a oggi, se la si trova al giorno *k* allora è sensato assumere che domani il sistema sarà «vicino» al giorno *k+1* (*si veda il box a p. XX*).

Sembrerebbe facile, ma non è ovvio che si trovi un analogo. Verso la metà del XIX secolo James Clerk Maxwell mise in discussione l'idea di base del determinismo (che anche se vero presenterebbe non pochi problemi): «Il fatto che dagli stessi antecedenti seguano le stesse conseguenze è una dottrina metafisica. [...] Ma non è molto utile nel mondo in cui viviamo, ove non si verificano mai gli stessi antecedenti e nulla accade identico a se stesso due volte. [...] L' assioma della fisica che ha, in un certo senso, la stessa natura è "che da antecedenti simili seguono conseguenze simili"».

Maxwell stava mettendo in discussione la possibilità pratica di trovare un analogo. Nel 1968 Lorenz provò ad applicare il metodo per le previsioni meteo usando mappe atmosferiche (in pratica come stato dell'atmosfera usava circa mille variabili). Il risultato fu disastroso, non trovò analoghi: Lorenz aveva riscoperto quanto intuito da Maxwell.

VARIABILI E LEGGI DI EVOLUZIONE

La soluzione di Takens

Per studiare un fenomeno si deve capire quali siano le variabili rilevanti e le equazioni di evoluzione. Per esempio, per un pendolo (un bastoncino rigido di lunghezza L incentrato a un'estremità e con una massa m all'estremità opposta) le variabili giuste sono θ e $d\theta/dt$ ove θ è l'angolo rispetto alla verticale e $d\theta/dt$ la sua derivata rispetto al tempo (cioè la velocità angolare). Le regola che determina l'evoluzione è l'equazione di Newton

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

dove g è l'accelerazione di gravità. Una volta note le condizioni iniziali ($\theta(0)$, $d\theta/dt(0)$) l'evoluzione del sistema è completamente determinata.

Non sempre è possibile scrivere esplicitamente le equazioni, e a volte non si conoscono nemmeno le variabili «giuste». In questi casi, conoscendo solo la serie temporale di una certa quantità $u_1, u_2, \ldots, u_M$ dove $u_j = u(j\Delta t)$ e Δt il tempo di campionamento è possibile risalire alle «variabili giuste» che descrivono il sistema. Il matematico olandese Floris Takens ha mostrato che se il sistema è deterministico e M è abbastanza grande è possibile «ricostruire lo spazio delle fasi» con il vettore y^d ottenuto con il metodo dei ritardi:

$$y^d_j = (u_j, u_{j-1}, \ldots, u_{j-d+1}),$$

dove d è ottenuto con una procedura per tentativi successivi. Il valore di d dipende dal sistema, se è troppo grande il metodo ha dei problemi pratici di fatto insolubili.

Si potrebbe argomentare che ormai sono passati decenni e siamo in un'era in cui abbiamo dati in grande abbondanza, per cui il metodo degli analoghi potrebbe funzionare. Tuttavia le cose non sono affatto così semplici, la spiegazione richiede un passo indietro, con la discussione di un tema apparentemente lontano dalle previsioni.

Tempi di ricorrenza

Tra i tanti contributi fondamentali di Poincaré c'è il teorema di ricorrenza: in un qualunque sistema meccanico la cui evoluzione avviene in una regione limitata, dopo un certo tempo si ritorna (arbitrariamente) vicino alla condizione iniziale.

Storicamente il teorema ebbe una grande importanza nell'acceso dibattito tra Ludwig Boltzmann ed Ernst Zermelo sul problema della reversibilità. Boltzmann argomentò che in un sistema con N particelle per avere un ritorno vicino alla stato iniziale bisogna aspettare un tempo che cresce esponenzialmente con N. Per un sistema macroscopico (N almeno 10^{20}), il tempo di ricorrenza è molto maggiore dell'età dell'universo, quindi non ci sono problemi pratici con l'irreversibilità.

Perché questa incursione in un argomento apparentemente tanto lontano dalle previsioni? La risposta è nel seguente risultato dovuto al matematico polacco Mark Kac: il tempo medio di ritorno in un insieme A è inversamente proporzionale alla probabilità, indicata con $P(A)$, che il sistema durante la sua evoluzione si trovi in A. Senza entrare in dettagli tecnici diciamo che il risultato vale per sistemi con «buone proprietà statistiche».

Quanto lontano si deve andare nel passato per trovare un analogo? Un momento di riflessione ci convince che il problema è equivalente a quello del tempo di ricorrenza. In un sistema con D variabili la probabilità di una regione A diminuisce al diminuire della sua taglia, di conseguenza il tempo medio di ricorrenza cresce; maggiore è D più veloce è la crescita. Questo risultato può essere compreso in modo intuitivo considerando come in un sistema con $D = 1$ un punto che ogni secondo salta a «caso» (o meglio con una regola deterministica caotica che sembra casuale) all'interno di un intervallo di lunghezza 1 diviso in 100 intervalli di lunghezza $\varepsilon=1/100$, ognuno dei quali è visitato con probabilità 1 per cento, per centrare un dato intervallo si devono fare (in media) 100 tentativi. Analogamente per un quadrato ($D = 2$), considerando quadratini di lato 1/100 si devono fare (in media) 10^4 tentativi (infatti il numero di quadratini è 10^4); nel caso di un cubo ($D = 3$), poiché ci sono 10^6 cubetti di lato 1/100 il numero di tentativi sale a 10^6. Riducendo ε da 1/100 a 1/1000 il numero medio di tentativi sale a 10^3 per $D = 1$, 10^6 per $D = 2$ e 10^9 per $D = 3$.

Un dettaglio tecnico: per essere precisi D è la dimensione del cosiddetto attrattore (che può anche essere non intera nei casi di attrattori frattali). Tralasciando le sottigliezze tecniche, diciamo che D indica il numero minimo di gradi di libertà efficaci del sistema ed è (come l'esponente di Lyapunov) una proprietà del sistema: non dipende dalla nostra abilità.

Il risultato di Kac spiega l'insuccesso di Lorenz e le difficoltà delle previsioni dalle serie storiche. Per dare un'idea facciamo qualche esempio: anche con una precisione non altissima – diciamo il 5 per cento, cioè $1/\varepsilon = 20$ – abbiamo che non appena D è grande si deve andare indietro un tempo estremamente lungo, se $D = 6$ servirebbero circa 6×10^7 tempi caratteristici, se $D = 8$ si arriva a 2×10^{10} tempi caratteristici. Per una precisione dell'1 per cento i tempi diventano rispettivamente 10^{12} e 10^{16}.

DENTRO L'EFFETTO FARFALLA

Il caos in due parole

L'aspetto principale del caos è ben riassunto da Henri Poincaré: «Se pure accadesse che le leggi della natura non avessero più alcun segreto per noi, anche in questo caso potremmo conoscere la situazione iniziale solo approssimativamente… può accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne producano di grandissime nei fenomeni finali. Un piccolo errore nelle prime produce un errore enorme nei secondi. La previsione diventa impossibile e si ha un fenomeno fortuito».

Questa sensibile dipendenza dalle condizioni iniziali (l'effetto farfalla) significa che una piccola incertezza al tempo iniziale cresce esponenzialmente nel tempo:

$$|\delta x(t)| = |\delta x(0)|\, e^{\lambda t}$$

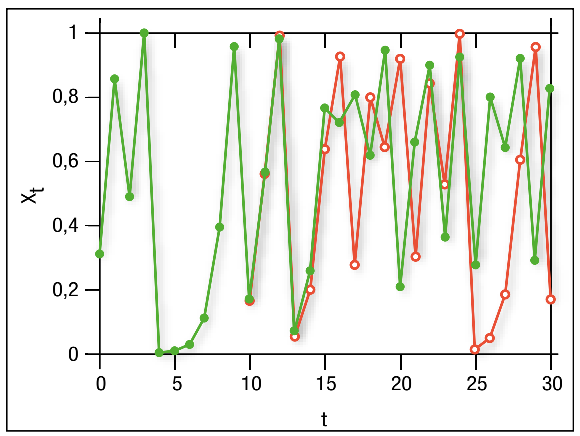
dove λ è chiamato esponente di Lyapunov. Il sistema può essere predetto con una tolleranza Δ solo fino al tempo di predicibilità T_p che dipende (poco) dall'incertezza iniziale e dall'esponente di Lyapunov $\lambda > 0$:

$$Tp \sim \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\Delta}{|\delta x(0)|}$$

Poiché la funzione logaritmo cresce molto lentamente (ln(5) = 1,609…, ln(10) = 2,302…, ln(20) = 2,995…, ln(40) = 3,688…) il tempo di predicibilità è determinato sostanzialmente dall'esponente di Lyapunov e poco dallo sforzo (e dal costo) per determinare la condizione iniziale con grande precisione (cioè diminuire $|\delta x(0)|$).

Nella figura sono mostrare due evoluzioni con condizioni iniziali molto vicine nel caso della mappa logistica (un modello molto semplificato per la variazione temporale di batteri in coltura):

$$x_{t+1} = 4\, x_t (1 - x_t)$$



Traiettorie della mappa logistica. Le condizioni iniziali sono molto vicine $|x_0 - x_0'| = 4 \times 10^{-6}$. Notare come solo dopo un tempo circa 16 le due traiettorie siano completamente diverse; in questo sistema si può mostrare che l'errore raddoppia a ogni passo, cioè $\lambda = \ln 2 \simeq 0{,}693$.

Danilo Sossi

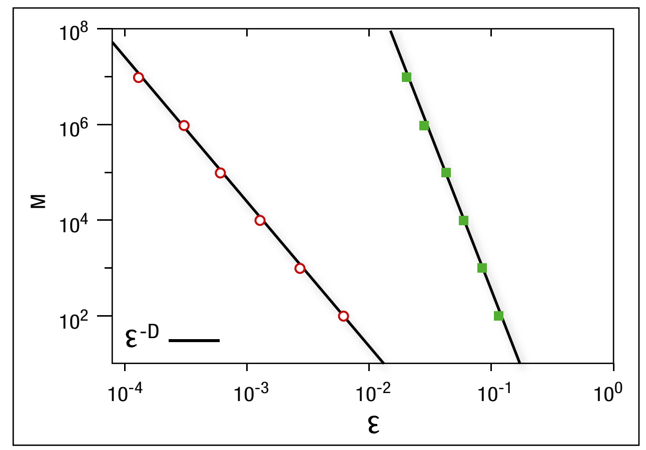
GUARDARE AL PASSATO PER PREVEDERE IL FUTURO

Metodo degli analoghi e lemma di Kac

Assumiamo che il sistema sia regolato da leggi deterministiche che, però, ci sono ignote. Il metodo degli analoghi permette, a partire dalla conoscenza dello stato del sistema fino a un tempo abbastanza remoto nel passato, di inferire il futuro. L'idea è cercare nel passato una situazione «vicina» a oggi. Data la serie $(x_1, x_2, \ldots, x_M)$ dove definiamo $x_j = x(j\Delta t)$, si cerca un analogo, ovvero un vettore x_k con $k < M$ «abbastanza vicino» (cioè tale che $|x_k - x_M| < \varepsilon$, dove ε indica il grado di accuratezza desiderato); una volta trovato, si «predice» il futuro ai tempi $M+n>M$, semplicemente assumendo per x_{M+n} lo stato x_{k+n}.

Nel caso il sistema sia caotico l'accuratezza diminuisce velocemente con n, ma questo è inevitabile. Quanto lontano si deve andare nel passato per trovare un analogo? Il problema è equivalente a quello del tempo di ricorrenza. Il matematico polacco Kac ha mostrato che il tempo medio di ritorno in un insieme A è inversamente proporzionale alla probabilità $P(A)$ che il sistema durante la sua evoluzione si trovi in A. In un sistema descritto da D variabili, la probabilità di stare in una regione A la cui estensione percentuale in ogni direzione è ε vale $P(A) \sim \varepsilon^D$; quindi la lunghezza M della serie deve essere almeno dello stesso ordine del tempo medio di ritorno $M_{min} \sim \varepsilon^{-D}$.

Numero di dati necessari per trovare un analogo con precisione percentuale ε. La figura è stata ottenuta dallo studio numerico di un modello geofisico introdotto da Lorenz, con due diverse scelte dei parametri: per i cerchi $D \simeq 3{,}1$, per i quadrati $D \simeq 6{,}6$. Notare come nel secondo caso per trovare un analogo con precisione dell'uno per cento occorre una serie estremamente lunga (circa un miliardo). Le rette indicano l'andamento $M \sim \varepsilon^{-D}$.



Danilo Sossi

Lorenz non poteva trovare un analogo, semplicemente perché nell'atmosfera D è enorme.

C'è comunque un caso importante in cui il metodo funziona: le maree. Il motivo è il basso valore di D, che varia da luogo a luogo ma è sempre tra 3 e 4, quindi la serie non deve avere una lunghezza proibitiva. Non necessariamente la situazione è sempre disperata. Nei sistemi con struttura multiscala, ovvero sistemi con variabili lente e veloci, può accadere che in pratica D dipende dalla risoluzione ε, e questo a volte permette previsioni a risoluzione non altissima.

Tra dati e teorie

Nel caso il vettore di stato x non sia noto, per esempio per i terremoti, si è costretti alla ricostruzione dello spazio delle fasi a partire da una serie temporale di una qualche variabile. Questo è matematicamente possibile (*si veda il box a p. XX*), ma nella pratica rimane il problema della D. L'eventuale presenza del caos non è il problema principale: se D è troppo grande (diciamo più di 5 o 6) semplicemente non si trova nessun analogo, e quindi non si arriva neppure a porsi il problema dell'incertezza.

Possiamo dire che il metodo degli analoghi è un tentativo di imparare dal passato, però per imparare bisogna incontrare almeno due volte la stessa situazione, e questo vale anche per altre tecniche di inferenza dai dati, per esempio le reti neurali.

Un veloce sconfinamento in finanza: è possibile usare il metodo degli analoghi? In linea di principio non ci sono problemi particolari (il carattere stocastico e non deterministico non è una grande limitazione), infatti certi approcci degli analisti finanziari sono simili alla tecnica degli analoghi. Rimane il problema del valore di D (sarebbe sorprendente se fosse piccolo) e soprattutto della stazionarietà del sistema. Se le regole (deterministiche o probabilistiche) cambiano troppo velocemente nel tempo, la filosofia dell'imparare dal passato non può che fallire. C'è chiara evidenza che i sistemi finanziari sono tutto meno che stazionari.

Poincaré ha stigmatizzato in modo chiaro gli eccessi di un empirismo ingenuo: «La scienza si costruisce con i fatti, come una casa con le pietre; ma una raccolta di fatti non è una scienza più di quanto un mucchio di sassi non sia una casa». Tuttavia, attualmente c'è una nefasta corrente di pensiero che vede come unico ingrediente rilevante nella scienza i dati. Secondo questo punto di vista, che purtroppo prende sempre più piede, dato che siamo nell'era dei dati in abbondanza si può fare a meno delle teorie, basta usare i dati (sono le parole del *guru* informatico Chris Anderson). Abbiamo visto che nel problema delle previsioni affidarsi troppo alla mole delle osservazioni è una grande ingenuità. I limiti del metodo degli analoghi mostrano la debolezza di approcci basati solo su osservazioni senza l'uso di conoscenze approfondite del problema che si vuole analizzare.

Forse la lezione più significativa è quella che apprendiamo dagli sviluppi dell'intuizione di Lewis Fry Richardson, grande scienziato inglese purtroppo poco noto. Richardson capì che i metodi «empirici» per le previsioni meteo in uso all'inizio del XX secolo dovevano essere superati. Concepì l'idea visionaria di integrare numericamente le equazioni fondamentali della dinamica dei fluidi e della termodinamica per determinare lo stato futuro dell'atmosfera. Per realizzare il sogno di Richardson, pur con i limiti inevitabili dovuti al caos, è stato necessario lo sviluppo di aspetti matematici (le equazioni «vere» coinvolgono variabili veloci che disturbano, quindi si devono scrivere equazioni efficaci), numerici (algoritmi veloci per integrare le equazioni) e tecnologici (computer per i calcoli e satelliti per determinare lo stato iniziale). ■

PER APPROFONDIRE

The Prediction of Future from the Past: an Old Problem from a Modern Perspective. Cecconi F., Cencini M., Falcioni M. e Vulpiani A., in «American Journal of Physics», Vol. 80, pp. 1001-1008, novembre 2012.

The End of Theory: the Data Deluge Makes the Scientific Method Obsolete. Anderson C., «Wired Magazine», 23 giugno 2008.

Determinismo e Caos. Vulpiani A., Carocci, Roma, 2004.

The Essence of Chaos. Lorenz E.N., University College London Press, Londra, 1995.