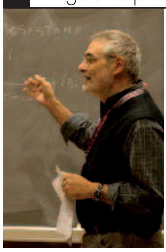
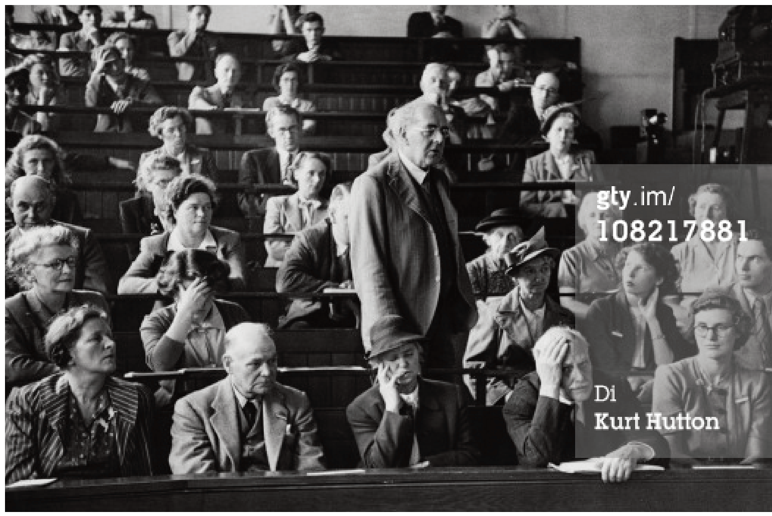
LEWIS FRY RICHARDSON: SCIENZIATO VISIONARIO E PACIFISTA

di Angelo Vulpiani

Angelo Vulpiani



Docente di Fisica teorica, attualmente insegna Meccanica statistica e Fisica dei sistemi dinamici presso il Dipartimento di Fisica dell'Università di Roma "La Sapienza".
I suoi interessi scientifici riguardano il caos e la complessità nei sistemi dinamici, la meccanica statistica di non-equilibrio e dei sistemi disordinati, la turbolenza sviluppata, i fenomeni di trasporto e diffusione. È stato *visiting professor* presso diversi Istituti di ricerca e Università in Francia, Belgio, Svezia, Danimarca e Stati Uniti.
Tra i suoi libri non specialistici ricordiamo: *Determinismo e Caos* (Nuova Italia Scientifica 1994, Carocci 2004) e, con G. Boffetta, *Probabilità in Fisica: un'introduzione* (Springer Italia, 2012).



Lewis Fry Richardson (1881-1953), benché ingiustamente poco conosciuto, ha avuto un ruolo fondamentale (spesso postumo) nella scienza del XX secolo. Nonostante il suo nome sia legato a molti aspetti importanti della Fluidodinamica, della Meteorologia e dell'Analisi numerica (si pensi al suo criterio di stabilità nei fluidi, all'idea del coefficiente di diffusione dipendente dalla scala e all'algoritmo che porta il suo nome, ancora oggi usato, per l'integrazione delle equazioni differenziali) è un personaggio poco noto anche tra i fisici ed i matematici. La sua originalità venne spesso scambiata per eccentricità ma in realtà anticipò idee e metodi, alcuni dei quali riscoperti solo dopo decenni. Il grande esperto di Fluidodinamica G.I. Taylor scrisse di lui che "*ragionava raramente negli stessi termini dei suoi contemporanei, i quali spesso non lo comprendevano*".

Ultimo di sette figli di una prospera famiglia quacchera inglese, nel 1898 entrò al *Durham College of Science* e due anni dopo ottenne una borsa di studio per il *King's College* di Cambridge dove ebbe un'educazione molto composita: studiò Fisica, Matematica, Chimica, Meteorologia, Botanica e Psicologia. All'inizio della carriera era incerto sulla strada da prendere, poi si convinse che avrebbe dovuto occuparsi di diverse discipline, come il grande scienziato tedesco Helmholtz che era stato medico e poi fisico. Decise però di seguire un diverso ordine. Ecco come si espresse: "*Pensai che mi sarebbe piaciuto passare la prima metà della vita sotto la stretta disciplina della Fisica, per applicare in seguito questa formazione allo studio delle cose vive*".
Oltre a dare importanti contributi alla Meteorologia, all'Analisi numerica ed alla Fluidodinamica, Richardson è stato il primo a tentare una descrizione matematica dei conflitti. È stato inoltre un pioniere dello studio dei sistemi autosimilari ed uno dei padri dei frattali.

Uno dei suoi primi impieghi fu presso il Servizio meteorologico ma durante la prima guerra mondiale il Servizio venne assorbito dal Ministero dell'Aeronautica Militare e Richardson, in quanto quacchero ed obiettore di coscienza, perse il posto. Tuttavia partecipò ugualmente (disarmato) alle operazioni belliche, nella *Friends Ambulance Unit*, sul fronte francese; a quanto pare era un mediocre guidatore ma un ottimo meccanico.
Proprio durante la guerra, Richardson (LFR da ora in poi) concepì la sua grande idea visionaria per le previsioni meteorologiche: utilizzare le equazioni fondamentali della dinamica dei fluidi e della termodinamica per determinare lo stato futuro dell'atmosfera. All'epoca questa procedura era praticamente impossibile per la mancanza di adeguati mezzi di calcolo. Nonostante questo, LFR fu in grado di impostare il problema nel modo corretto e mise anche a punto algoritmi numerici (usati ancora oggi) per l'integrazione di equazioni differenziali. Il manoscritto del libro che scrisse tra un turno e l'altro al fronte, *Weather Prediction by Numerical Process*, andò perduto durante la battaglia della Champagne nell'aprile del 1917 e venne ritrovato fortunosamente (e fortunatamente per il progresso della Meteorologia) mesi dopo sotto un mucchio di carbone.
A 47 anni, Richardson conseguì un dottorato in Psicologia. Nel 1939, grazie ad una piccola eredità, andò in pensione anticipatamente per dedicarsi ai suoi studi di Psicologia matematica e fu tra i primi a tentare uno studio dei conflitti in termini matematici. Morì nel sonno il 30 settembre 1953: l'anno seguente la BBC avrebbe trasmesso il primo programma televisivo di previsioni meteo.
Prima di Richardson, per le previsioni meteo si utilizzava un metodo semiempirico basato su un idea che nasce dall'osservazione della regolarità di molti fenomeni. Lo dice anche la Bibbia: "*Ciò che è stato sarà e ciò che si è fatto si rifarà; non c'è niente di nuovo sotto il sole*" (Ecclesiaste). Sostanzialmente si cercava nel passato una situazione "vicina" al giorno in oggetto, se la si trovava al giorno k allora si deduceva che fosse sensato assumere che il giorno successivo il sistema sarebbe stato "vicino" al giorno $k+1$. In termini più formali: data la serie $(x_1, x_2, ..., x_M)$, dove $x_j = x(j\Delta t)$ è il vettore che descrive lo stato del sistema al tempo $j\Delta t$, si guarda il passato e si cerca un analogo, ovvero un vettore x_k con $k < M$ "abbastanza vicino" (cioè tale che $|x_k - x_M| < \epsilon$ dove ϵ indica il grado di accuratezza desiderato); una volta trovato, si "predice" il futuro ai tempi $M+n > M$, semplicemente assumendo per x_{M+n} lo stato x_{k+n}.
Sembrerebbe tutto facile, ma non è ovvio che si trovi un analogo. LFR capì che il metodo non poteva funzionare, in quanto non c' è nessun motivo particolare per credere che l'analogo esista, od almeno sia possibile trovarlo: "*L'Almanacco Nautico, quel prodigio di accurata previsione, non è basato sul principio che la storia astronomica ripeta nel complesso se stessa. Sarebbe prudente dire che una particolare disposizione di stelle, pianeti e satelliti potrebbe ricorrere due volte. Perché quindi dovremmo aspettarci che una mappa del clima presente sia esattamente rappresentata in un calendario del clima passato?*".
Il problema di trovare un analogo è strettamente collegato al teorema di ricorrenza di Poincaré: un sistema deterministico, con uno spazio delle fasi limitato, dopo un certo tempo ritorna vicino alla sua condizione iniziale. Quindi l'analogo sicuramente esiste, ma quanto indietro si deve andare per trovarlo? La risposta, sostanzialmente intuita da Boltzmann nel suo acceso dibattito con Zermelo sul problema dell'irreversibilità, è dovuta al matematico polacco Mark Kac: il tempo medio di ritorno in una regione A è proporzionale all' inverso della probabilità $P(A)$ che il sistema si trovi in A:

$$\langle T_R \rangle = \frac{\tau}{P(A)} ,$$

ove τ è un tempo caratteristico. Per capire quanto sia difficile osservare la ricorrenza, e quindi trovare un analogo, consideriamo in un sistema di dimensione D (per la precisione, se il sistema è dissipativo, D è la dimensione frattale dell'attrattore): la probabilità $P(A)$ di stare in una regione A che in ogni direzione ha un'estensione percentuale ϵ è proporzionale a ϵ^D, quindi $\langle T_R \rangle \sim \epsilon^{-D}$. Se D è grande (diciamo oltre 10), già per precisioni non enormi (ad esempio 5%, cioè $\epsilon = 0.05$) il tempo di ritorno è talmente grande che in pratica non si osserva la ricorrenza (o equivalentemente non si trova un analogo).
Nel suo tentativo di effettuare previsioni del tempo atmosferico, Richardson ha introdotto molte delle idee su cui è basata la moderna Meteorologia. Nel suo libro propose di usare le equazioni che regolano l'evoluzione dell'atmosfera: partendo da una data condizione iniziale, il tempo oggi, integrando numericamente le equazioni, si può determinare lo stato futuro, cioè il tempo domani o tra una settimana.
Il suo approccio ora sembra ovvio (è proprio quello attualmente usato per fare le previsioni meteo): sappiamo che l'atmosfera evolve in accordo con le equazioni dell'Idrodinamica (per i campi di velocità u, densità ρ, pressione p, percentuale di acqua s e temperatura T) e della Termodinamica che specifica la relazione (equazione di stato) tra ρ, T, s e p. Quindi, dalla conoscenza dello stato presente dell'atmosfera, risolvendo sette equazioni alle derivate parziali (tre per la velocità u e poi quelle per ρ, T, s e p), si può (almeno in linea di principio) effettuare una previsione del tempo. Ovviamente le equazioni in questione non possono essere risolte con carta e penna e la soluzione numerica è l'unica possibilità.
L'idea di fondo era quella giusta. Paradossalmente le equazioni proposte da LFR erano troppo accurate e questo ebbe delle conseguenze negative (vedi Box A). Inoltre, a quei tempi, le difficoltà pratiche erano di fatto insuperabili. Le condizioni iniziali usate da Richardson erano costituite da una tabulazione delle condizioni meteo osservate nell'Europa settentrionale alle quattro della mattina del 20 maggio del 1910 durante un festival internazionale di mongolfiere. Il lavoro numerico di Richardson fu lungo, laborioso e fatico-

so: si stima che, ritagliando tempo ai suoi impegni, nell'arco di due anni abbia lavorato almeno mille ore a fare calcoli a mano e con qualche rudimentale macchina calcolatrice. Il risultato, per le previsioni sei ore dopo, si rivelò molto deludente. Richardson correttamente comprese che "*il metodo è complicato perché l'atmosfera è complicata*". Tuttavia, nelle conclusioni fu moderatamente ottimista: "*Forse un giorno in un futuro non lontano sarà possibile sviluppare calcoli più velocemente di quanto procede il clima. (…) Ma questo è un sogno*".

All'epoca di Richardson, con il termine "calcolatore" si indicava la persona che faceva i calcoli a mano e con l'aiuto di rudimentali calcolatrice. LFR ebbe l'idea, che anticipava i calcolatori paralleli, di utilizzare tanti calcolatori (umani) contemporaneamente: "*Immaginiamo un sala grande quanto un teatro* (...) *una miriade di calcolatori lavorano sulle condizioni meteorologiche del paese della carta in cui ognuno si trova, ma ciascuno si occupa solo di un'equazione o di una parte di un' equazione. Il lavoro di ogni regione è coordinato da un funzionario di rango superiore*". Per la realizzazione del sogno di Richardson si dovrà aspettare fino agli anni '50 con lo sviluppo di tre "ingredienti" assolutamente non banali (vedi Box A):

a) la messa a punto di equazioni efficaci;
b) algoritmi numerici veloci;
c) computer per i calcoli numerici.

Un altro dei molti contributi scientifici di Richardson è lo studio della diffusione turbolenta. LFR mostrò che la distanza tra coppie di particelle trasportate dal campo di velocità (ad esempio, il vento) è una variabile non gaussiana con grandi escursioni rispetto al valore medio. Questo problema è fondamentale in molte applicazioni, ad esempio per la dispersione di una macchia di inquinante in mare oppure di una nuvola di fumo in atmosfera (vedi Box B).

Da pacifista coerente, Richardson rifiutò di far utilizzare le sue ricerche sulla diffusione per scopi bellici e per diversi anni abbandonò lo studio della turbolenza; sembra anche che distrusse alcuni suoi lavori non ancora pubblicati per evitare che potessero essere usati dai militari.

Nei suoi studi di Fluidodinamica, Richardson si rese conto che non sempre i fenomeni naturali possono essere descritti da funzioni regolari. Ad esempio osservò che in turbolenza, invece dello scenario tipico, cioè piccole variazioni intorno al valor medio e qualche rara fluttuazione mai particolarmente grande (diciamo dell'ordine dello scarto quadratico), si hanno lunghi intervalli di quiescenza in cui il segnale ha un andamento regolare ed è vicino al suo valore medio, interrotti da brevi comportamenti irregolari con fluttuazioni enormi. Al contrario, nel caso di variabili gaussiane non si possono avere fluttuazioni troppo grandi.

Da queste osservazioni, si pose seriamente la domanda (a prima vista assurda) se il vento avesse una velocità. A partire da pochi dati empirici, LFR intuì la struttura autosimilare della turbolenza ed ecco come riassunse la sua intuizione in una poesia (ispirata ad una parodia di Swift):

Grandi vortici generano piccoli vortici
che alimentano con la loro velocità;
ed i piccoli vortici generano vortici ancora più piccoli
e così via fino alla viscosità
(in senso molecolare).

La formalizzazione matematica di questa idea venne fatta negli anni '40 del XX secolo da Kolmogorov che mostrò come, nel cosiddetto intervallo inerziale, il campo di velocità sia molto "rugoso", ben diverso dalle usuali funzioni a cui siamo abituati: la differenza di velocità $\delta v(l)$ tra due punti distanti l non è proporzionale a l; al contrario si ha un comportamento non analitico $\delta v(l) \sim l^{1/3}$ con gradienti di velocità enormi (infiniti nel limite di numeri di Reynolds infiniti).

Il primo a chiedersi *quanto è lunga la costa della Bretagna* non fu Mandelbrot (che è considerato il padre dei frattali), bensì proprio Richardson. Tra le carte trovate dopo la sua morte ci sono grafici in coordinate bilogaritmiche dove LFR riportata in funzione della risoluzione l la lunghezza $L(l)$ della costa della Gran Bretagna, della frontiera terrestre della Germania, della frontiera tra Spagna e Portogallo, della costa dell'Australia e dell'Africa del Sud. Invece della convergenza ad un valore costante, Richardson osservò un comportamento del tipo $L(l) \sim l^{-\alpha}$ dove α è praticamente zero per la costa dell'Africa del Sud, mentre negli altri casi è positivo e crescente con la "rugosità" della linea; in termini moderni $\alpha = D_F - 1$ (dove D_F è la dimensione frattale). Siamo di fronte ai primi vagiti degli oggetti frattali e delle strutture autosimilari che, almeno in alcuni casi particolari, erano stati studiati in Matematica già tra Ottocento e Novecento da Cantor, Weierstrass, Hausdorff e Julia. Ad esempio, la funzione:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A^{-n} \cos(2\pi B^{n-1} x) \ , \quad 0 \leq x \leq 1$$

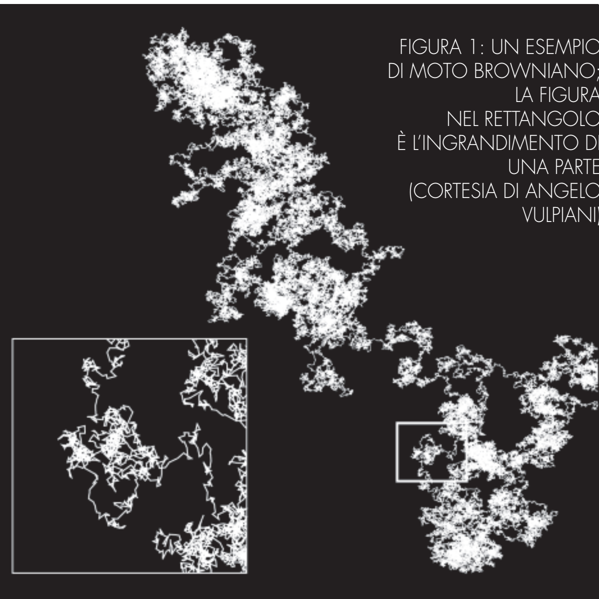


FIGURA 1: UN ESEMPIO DI MOTO BROWNIANO; LA FIGURA NEL RETTANGOLO È L'INGRANDIMENTO DI UNA PARTE (CORTESIA DI ANGELO VULPIANI)

dove A e B sono interi e $A < B$, studiata da Weierstrass nell'ambito della teoria delle serie di Fourier, è estremamente irregolare, non è differenziabile ed il suo grafico ha lunghezza infinita, con dimensione frattale (vedi Box C) $D_F = 2 - \ln A/\ln B$ compresa tra 1 e 2.

Perrin fu tra i primi a rendersi conto dell'importanza per la Fisica dei sistemi autosimilari, che hanno cioè la proprietà che una loro parte ingrandita appare simile al sistema originario: "*Osserviamo, ad esempio, uno di quei fiocchi bianchi che si ottengono salando dell' acqua saponata. Da lontano, il suo contorno può sembrare preciso, ma non appena ci si avvicina un po', questa precisione scompare* (...). *Anche se si prende una lente di ingrandimento, un microscopio, l'incertezza rimarrà la stessa; ogni volta che si aumenta l'ingrandimento si vedranno apparire delle nuove anfrattosità, senza mai dare l'impressione precisa e riposante che dà ad esempio una sfera d'acciaio ben levigato*".

La figura 1 mostra un esempio di moto browniano: è ben evidente come l' ingrandimento di una parte abbia le stesse proprietà del tutto.

Tuttavia, questi studi rimasero un po' ai margini: in Matematica erano considerati una sorta di raffinate costruzioni di curiosi mostri, in Fisica casi patologici non rappresentativi di quelli che (erroneamente) si riteneva fossero i fenomeni importanti. Colui che ha riconosciuto la diffusa presenza e l'importanza di tali comportamenti nelle scienze naturali e ha anche coniato il termine *frattale* è stato Benoit Mandelbrot che nei suoi libri, giustamente, rende omaggio a Richardson che deve essere considerato il nonno dei frattali e dell'autosimilarità.

Bibliografia

Vita e opere di Richardson:

Richardson S.A., "Lewis Fry Richardson (1881-1953): a personal biography", *Conflict Resolution* 1, 300 (1957).

Ashford O.M., *Prophet or Professor? The Life and Work of Lewis Fry Richardson*, Adam Hilger, 1985.

Hunt J.C.R., "Lewis Fry Richardson and his contributions to mathematics, meteorology, and models of Conflict", *Annu. Rev. Fluid Mech.* 30, XIII (1998).

Diffusione:

Richardson L.F., "Atmospheric Diffusion Shown on a Distance-Neighbour Graph", *Proc. Royal Soc. London.,* Ser A 110, 709 (1926).

Taylor G.I., "The present position in the theory of turbulent diffusion", *Advances in Geophysics* 6, 101 (1959).

Majda A.J. e Kramer P.R., "Simplified models for turbulent diffusion: theory, numerical modeling and physical phenomena", *Phys. Rep.* 314, 237 (1999).

Boffetta G. e Sokolov I.M., "Relative dispersion in fully developed turbulence: the Richardson's law and intermittency corrections", *Phys. Rev. Lett.* 88, 094501 (2002).

Turbolenza:

Kolmogorov A.N., "The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers", *Dokl. Akad. Nauk.* SSSR 30, 301 (1941).

Kolmogorov A.N., "A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number", *J. Fluid. Mech.* 13, 82 (1962).

Monin A. e Yaglom A., *Statistical Fluid Dynamics*, Vol. I and II, MIT Press, Cambridge MA, 1975.

Frisch U., *Turbulence: The Legacy of A.N. Kolmogorov*, Cambridge University Press, 1995.

Bohr T., Jensen M.H., Paladin G. e Vulpiani A., *Dynamical Systems Approach to Turbulence*, Cambridge University Press, 1998.

Previsioni meteo:

Richardson L.F., *Weather Prediction by Numerical Process,* Cambridge University Press, 1922.

Charney J.G., "On a physical basis for numerical prediction of large-scale motions in the atmosphere", *J. Meteor.* 6, 371 (1949).

Charney J.G., Fjortoft R. e von Neumann J., "Numerical integration of the barotropic vorticity equation", *Tellus* 2, 237 (1950).

Dahan Dalmedico A., "History and Epistemology of Models: Meteorology as a Case Study", *Archive for History of Exact Sciences* 55, 395 (2001).

Lynch P., *The Emergence of Numerical Weather Prediction: Richardson's Dream*, Cambridge University Press, 2006.

Lynch P., "The origins of computer weather prediction and climate modeling", *J. Comp. Phys.* 227, 3431 (2008).

Cecconi F., Cencini M., Falcioni M. e Vulpiani A., "The prediction of future from the past: an old problem from a modern perspective", *Am. J. Phys.* 80, 1001 (2012).

Tibaldi S., "Che tempo farà", *Le Scienze* 538, 42 (giugno 2013).

Tecniche multiscala:

E W. e Engquist B., "Multiscale modeling and computation", *Notices Am. Math. Soc.* 50, 1062 (2003).

Mazzino A., Musacchio S. e Vulpiani A., "Multiple-scale analysis and renormalization for preasymptotic scalar transport", *Phys. Rev.* E 71, 011113 (2004).

E W., *Principles of Multiscale Modeling*, Cambridge University Press, 2011.

Matematica dei conflitti:

Richardson L.F., "Could an arms race end without fighting?", *Nature* 168, 567 (1951).

Richardson L.F., "The problem of contiguity: an appendix of statistics of deadly quarrels", *General Systems Yearbook* 6, 139 (1961).

Hess G.D., "An introduction to Lewis Fry Richardson and his mathematical theory of war and peace", *Conflict Management and Peace Science* 14, 77 (1995).

Frattali e multifrattali:

Perrin J., *Gli atomi*, Editori Riuniti, 1981.

Mandelbrot B.B., *Gli oggetti frattali*, Einaudi, 1987.

Paladin G. e Vulpiani A., "Anomalous scaling laws in multifractal objects", *Phys. Rep.* 156, 147 (1987).

Boffetta G., Mazzino A. e Vulpiani A., "Twenty- five years of multifractals in fully developed turbulence: a tribute to Giovanni Paladin", *J. Phys. A: Math. Theor.* 41, 363001 (2008).

Box A
Le previsioni meteo: da Richardson ai giorni nostri

L'idea di fondo di LFR per le previsioni meteo era corretta ma per l'attuazione pratica del suo progetto era necessaria l'introduzione di un ulteriore ingrediente che Richardson non poteva conoscere. Anche con l'aiuto di moderni computer, l'integrazione numerica delle equazioni dell'Idrodinamica non è cosa facile. Una delle ragioni è la cosiddetta instabilità numerica che impone di usare passi di integrazione Δt molto piccoli. Infatti, nel trattamento numerico di equazioni alle derivate parziali, è necessario introdurre una discretizzazione dello spazio, con una griglia le cui maglie sono di misura Δx, e del tempo (con un passo di integrazione Δt). Per avere la convergenza dell'algoritmo numerico alla soluzione delle equazioni alle derivate parziali, Δt e Δx non possono assumere valori arbitrari ma devono soddisfare dei vincoli che dipendono dall'equazione che si studia e in genere anche dalle condizioni iniziali. Solo per dare un'idea del problema, consideriamo l'equazione (molto più semplice di quella usata da Richardson):

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -v\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \qquad (A.1)$$

dove v è costante e $-\infty < x < \infty$. Una semplice, ma efficiente, approssimazione dell'equazione precedente è:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -v\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \qquad (A.2)$$

dove $u_j^n = u(j\Delta x,\ n\Delta t)$. In questo caso, per avere la stabilità dell'algoritmo (A.2), deve valere la "condizione di Courant" (ignota ai tempi di Richardson):

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq C = \frac{1}{|v|}\ , \qquad (A.3)$$

dove, poiché l'equazione è lineare, C non dipende dalla condizione iniziale.
Nel problema affrontato da Richardson, il risultato negativo (necessità di usare un Δt molto piccolo) non è un mero dettaglio matematico ma ha una precisa origine fisica. È una conseguenza della presenza nell'atmosfera di fenomeni, come onde sonore ed onde di gravità, i cui tempi caratteristici sono molto brevi. Utilizzare direttamente le equazioni della Fluidodinamica e della Termodinamica non è affatto promettente e quindi, per sperare di avere un progresso significativo, è assolutamente necessario capire quali aspetti del problema debbano essere considerati e quali trascurati.
I fenomeni veloci non sono particolarmente interessanti per le previsioni meteorologiche, quanto piuttosto le variabili lente; quindi si deve, in qualche modo, tenerne conto. Il modo per risolvere il problema venne trovato da Charney e dai suoi colleghi negli anni '40-'50 del XX secolo nell'ambito del *Meteorological Project* presso l'*Institute of Advanced Study* di Princeton. Nel progetto vennero coinvolti scienziati da diversi campi: matematici (come J. von Neumann), esperti di Meteorologia, Ingegneria e computer.
Possiamo dire che con questo progetto ha inizio la realizzazione del sogno di Richardson.
In questo grande sforzo scientifico ha un ruolo fondamentale lo sviluppo di aspetti tecnologici (come la costruzione del primo computer moderno, l'ENIAC), di metodi numerici (algoritmi per l'integrazione delle equazioni alle derivate parziali) e la costruzione di modelli, cioè l'introduzione di equazioni efficaci per la Meteorologia.
Charney ed i suoi collaboratori notarono che le equazioni originariamente proposte da Richardson, benché corrette, non sono adatte per le previsioni meteo. Il motivo (apparentemente paradossale) è che sono troppo accurate e descrivono anche moti ondosi ad alta frequenza che sono irrilevanti in ambito meteorologico. È quindi necessario costruire equazioni efficaci che eliminino le variabili veloci. L'introduzione della procedura di filtraggio, che separa la parte meteorologicamente significativa da quella insignificante, ha un chiaro vantaggio pratico: le instabilità numeriche sono meno severe e quindi si può usare un passo di integrazione Δt relativamente grande che permette calcoli numerici più efficienti.
Oltre all'aspetto computazionale, è importante il fatto che con le equazioni efficaci per la dinamica lenta è possibile individuare gli ingredienti più importanti che invece rimangono nascosti nella descrizione dettagliata con il sistema delle equazioni originali. Le equazioni usate sono chiamate quasi-geostrofiche; il caso più semplice è quello barotropico in cui la pressione dipende solo dalle coordinate orizzontali.
Come esempio di costruzione di equazioni efficaci per il comportamento a grande scala, consideriamo l'equazione di diffusione in una dimensione spaziale:

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta = \frac{\partial}{\partial x}\Big(D(x, x/\epsilon)\frac{\partial\theta}{\partial x}\Big) \qquad (A.4)$$

dove nel coefficiente di diffusione $D(x,x/\epsilon)$ ci sono due scale spaziali: un scala $O(\epsilon)$ ed una $O(1)$. Per esempio, possiamo pensare $D(x,y)$ periodica in y con periodo L. Il sistema (A.4) descrive processi fisici come la conduzione del calore in materiali compositi. Si vuole trovare un'equazione efficace valida a tempi lunghi e su scale molto più grandi di ϵ, cioè un'equazione per la funzione $\Theta(x,t)$ ottenuta con una procedura di filtraggio della $\theta(x,t)$, in pratica una media mobile $\Theta(x,t) = \int_0^L \theta(x + z,\ t)dz/L$. Le tecniche di omogeneizzazione (in Fisica si usa il termine multiscala) mostrano che:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Theta = \frac{\partial}{\partial x}\Big(D^E(x)\frac{\partial\Theta}{\partial x}\Big) \qquad (A.5)$$

dove

$$D^E(x) = \frac{1}{\langle\frac{1}{D(x,y)}\rangle} = \Big[\frac{1}{L}\int_0^L \frac{dy}{D(x,y)}\Big]^{-1}$$

Box B
Non sempre la diffusione è gaussiana

Nel caso più semplice di diffusione in cui agisce solo la diffusione molecolare, la densità di probabilità $P(x,t)$ evolve secondo la equazione di Fick (per semplicità di notazione, consideriamo il caso unidimensionale sulla retta infinita):

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}P(x,t) \qquad (B.1)$$

dove D è il coefficiente di diffusione. Se si considera una condizione iniziale $P(x,0)$ concentrata intorno all'origine, la soluzione asintotica è una gaussiana:

$$P(x,t) \simeq \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\ exp - \frac{x^2}{4Dt}$$

da cui $\langle x^2(t)\rangle \simeq 2Dt$.

Consideriamo ora il problema della diffusione relativa in cui sono coinvolte due particelle le cui posizioni sono x_1 ed x_2. Nel caso che non ci sia influenza reciproca e la densità di probabilità di ognuna delle due particelle evolva con la legge di Fick, è facile vedere che per la variabile $l = x_2 - x_1$ la densità di probabilità segue la legge di Fick (B.1) con l'unica differenza che il suo coefficiente di diffusione raddoppia:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(\ell,t) = 2D\frac{\partial^2}{\partial \ell^2}P(\ell,t)$$

e quindi $\langle l^2(t)\rangle \simeq 4Dt$.

Poniamo ora una questione più ambiziosa: abbiamo una macchia di una sostanza trasportata da un campo di velocità, assumendo in prima approssimazione che la sostanza sia "passiva" cioè non influenzi il campo di velocità. Questo non è un problema meramente accademico ma è di grande interesse applicativo: si pensi a un inquinante in mare o in atmosfera, per cui è molto importante capire come si allarga nel tempo la macchia. Questo è proprio il problema della diffusione relativa. Ovviamente non vale più la legge di Fick nella sua forma più semplice (B.1) perché il moto delle due particelle è influenzato dalla presenza del campo di velocità del fluido (aria od acqua).
Richardson, con una profonda intuizione fisica dei meccanismi di trasporto dovuti alla turbolenza, propose la seguente equazione:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(\ell,t) = \frac{\partial}{\partial \ell}\Big(D(\ell)\frac{\partial}{\partial \ell}P(\ell,t)\Big) \qquad (B.2)$$

cioè una legge di Fick in cui il coefficiente di diffusione dipende dalla distanza, questo per tener conto del campo di velocità turbolento. Come determinare $D(l)$? Da dati di diffusione in atmosfera, LFR ipotizzò (con un certo coraggio) la legge $D(l) \sim l^{4/3}$ da cui si ottiene $\langle l^2(t)\rangle \sim t^3$.
Tutto questo avveniva negli anni '20 del XX secolo; circa due decenni dopo, il matematico sovietico A.N. Kolmogorov formulò (in parte seguendo l'idea della cascata turbolenta di Richardson) la prima teoria moderna della turbolenza e in questo ambito è facile dimostrare la correttezza della congettura di Richardson $D(l) \sim l^{4/3}$. Ovviamente l'importanza del lavoro di Richardson non consiste nell'aver "indovinato" $D(l) \sim l^{4/3}$, bensì nella comprensione dei meccanismi fisici che portano ad un' equazione di diffusione della forma (B.2).
Non è difficile trovare una soluzione asintotica della (B.2):

$$P(\ell,t) \sim \frac{1}{t^{3/2}}\ exp - C_R\frac{|\ell|^{2/3}}{t}$$

che è una funzione decisamente diversa dalla gaussiana.
Tutto ciò è in accordo con la realtà? Si potrebbe ragionare, come proposto ad esempio da Batchelor, in modo diverso considerando un'equazione di Fick con un coefficiente di diffusione costante al variare di l ma dipendente dal tempo:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(\ell,t) = D(t)\frac{\partial^2}{\partial \ell^2}P(\ell,t)$$

con $D(l) \sim t^2$ (una volta nota la teoria di Komogorov, questo andamento è ovvio). In questo modo si ottiene, come nell'approccio di Richardson, $\langle l^2(t)\rangle \sim t^3$ ma la densità di probabilità è gaussiana:

$$P(\ell,t) \sim \frac{1}{t^{3/2}}\ exp - C_B\frac{\ell^2}{t^3}\ .$$

Abbiamo quindi due approcci che, per quanto riguarda $\langle l^2(t)\rangle$, danno lo stesso risultato ma predicono diverse densità di probabilità. Ora sappiamo che l'approccio di Richardson (come quello di Kolmogorov degli anni '40) non può essere del tutto esatto perché il campo di velocità è intermittente (ha una struttura multifrattale). Solo all'inizio del nostro secolo accurate simulazioni numeriche hanno mostrato che la $P(l,t)$ è in sostanziale accordo con le conclusioni di Richardson: la presenza dell'intermittenza introduce solo piccole correzioni.

Box C
Frattali, autosimilarità e grandi fluttuazioni

La sistematizzazione delle intuizioni di Perrin e Richardson richiede l'introduzione di oggetti matematici (i frattali) che a prima vista sembrano dei mostri patologici e invece sono estremamente comuni in natura.
Consideriamo una linea regolare e domandiamoci come misurarne la lunghezza.
Possiamo approssimare la linea con una spezzata di segmenti lunghi l e poi prendere l sempre più piccolo, indicando con $N(l)$ il numero di segmenti.
Se l è abbastanza piccolo, la lunghezza L è circa $N(l)l$; quindi $N(l)$ è proporzionale a $1/l$. Nel caso di una superficie, la possiamo "piastrellare" con $N(l)$ quadratini di lato l e l'area A sarà approssimata da $N(l)l^2$; quindi $N(l)$ è proporzionale a $1/l^2$. Analogamente, per riempire un oggetto tridimensionale, sarà necessario un numero di cubetti di lato l proporzionale a $1/l^3$.
Da questa osservazione nasce l'idea di generalizzare il concetto di dimensione: un oggetto ha dimensione frattale D_F se il numero di cubetti di lato l necessari per ricoprire l'oggetto si comporta come:

$$N(\ell) \sim \frac{1}{\ell^{D_F}} \ .$$

Ovviamente, per un oggetto regolare la dimensione frattale non è altro che la solita dimensione. Esistono oggetti in cui D_F è non intera? La risposta è sì. Un esempio è la curva di Von Koch, la cui costruzione è schematizzata in figura 2: si prenda un segmento di lunghezza unitaria e lo si divida in tre parti uguali. La parte centrale viene tolta e sostituita da due segmenti della stessa lunghezza. Si ripete la procedura su i quattro elementi così ottenuti, poi sui sedici della generazione successiva e così via un numero infinito di volte. Si ottiene una curva "molto spigolosa" con dimensione frattale $\ln 4/\ln 3 \simeq 1.2618$.
Siamo in presenza di una struttura autosimilare: guardando una figura con una certa risoluzione non è possibile dire a che scala ci si trova. L' aspetto veramente importante è che questo tipo di comportamento non è un mero artefatto di modelli matematici patologici. Ad esempio, se si prova a misurare la lunghezza $L(l)$ di una costa frastagliata (come proposto per la prima volta da Richardson), si trova che aumenta al diminuire della risoluzione l: ci si trova di fronte ad un oggetto frattale con D_F compresa tra 1 e 2. Nel caso della curva di Von Koch, è $L(l) \sim l^{-(\ln 4/\ln 3-1)}$.
Questo tipo di "rugosità" è molto comune: è presente negli attrattori dei sistemi dinamici dissipativi caotici e in molti fenomeni naturali, ad esempio in turbolenza (come dice Richardson nella poesia sui vortici che contengono vortici più piccoli, che a loro volta ne contengono di ancora più piccoli ecc.) e nelle strutture a grande scala delle galassie.
Due dei più importanti risultati del calcolo delle probabilità sono la legge dei grandi numeri e il teorema del limite centrale che valgono per variabili indipendenti (o debolmente dipendenti) e con varianza finita. Che cosa succe-

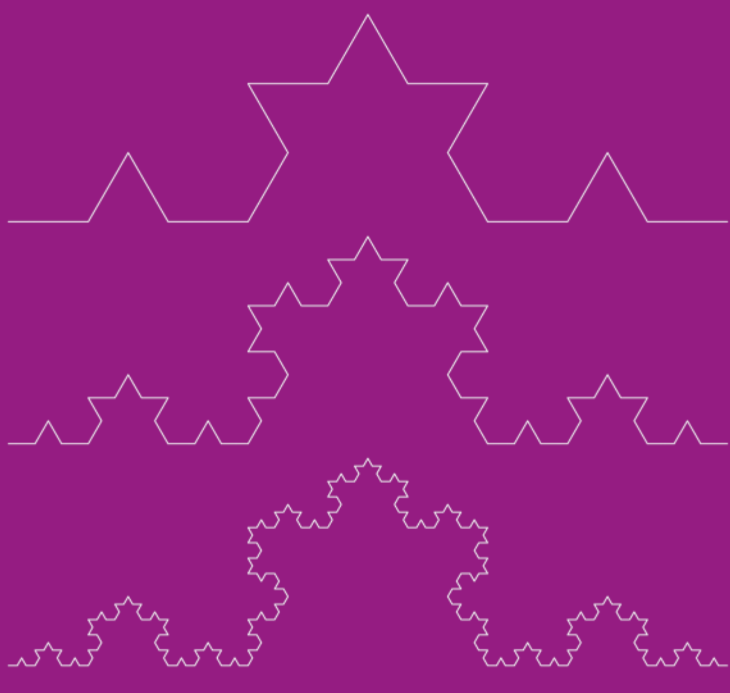


FIGURA 2: SCHEMA PER LA COSTRUZIONE DELLA CURVA DI VON KOCH (CORTESIA DI ANGELO VULPIANI)

de nel caso di variabili fortemente dipendenti e/o con varianza infinita?
Come esempio, consideriamo una successione di variabili aleatorie indipendenti $\{x_n\}$, $n = 1,2,\ldots,N$ ciascuna delle quali ha densità di probabilità di Cauchy:

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \; ,$$

Per queste variabili (con varianza infinita) è possibile dimostrare la seguente proprietà. La "media":

$$Y_N = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N}$$

per ogni N (anche arbitrariamente grande) ha la stessa distribuzione di probabilità della singola variabile.

Siamo in presenza di una situazione molto diversa da quella in cui la varianza è finita e quindi per la legge dei grandi numeri, per $N \to \infty$, $(x_1 + \ldots + x_N)/N$ tende, a parte casi con probabilità nulla, al valore medio.
Nel caso valga il teorema del limite centrale abbiamo che la variabile:

$$z_N = \frac{x_1 + \ldots. + x_N - mN}{\sigma\sqrt{N}}$$

per grandi valori di N ha una distribuzione limite (la gaussiana). Se la varianza è infinita, per avere una distribuzione limite, si deve considerare la variabile:

$$q_N = \frac{x_1 + \ldots. + x_N - mN}{C_\alpha N^\alpha}$$

per opportuni valori di α e C_α che dipendono dalla distribuzione della singola variabile (in particolare dal comportamento delle code). Per N grande, la distribuzione di probabilità di q_N tende ad una funzione limite (diversa dalla gaussiana). Ad esempio, se per grandi valori di $|x|$ la densità di probabilità è della forma:

$$p_x(x) \sim \frac{1}{x^2} \; ,$$

allora è $\alpha = 1$ e la distribuzione limite è quella di Cauchy; ovviamente, se la varianza è finita, si ha $\alpha = 1/2$ e la distribuzione limite è la gaussiana.
Ormai le distribuzioni di probabilità con code a potenza e varianza infinita sono accettate come non patologiche e ampiamente utilizzate nella modellizzazione di molti fenomeni fisici e finanziari. Non era certo così ai tempi di Richardson che fu uno dei primi, nell'ambito dei suoi studi sui conflitti armati, ad osservare la presenza non patologica di questo tipo di densità di probabilità.
Anche nei casi con varianza finita, in presenza di forti correlazioni tra variabili a tempi diversi, si possono avere "fluttuazioni selvagge". Un esempio tratto dalla turbolenza è mostrato in figura 3. Si ha una distribuzione di probabilità non gaussiana e, osservando l'evoluzione temporale della variabile nel tempo, si nota un'alternanza di lunghi intervalli con piccole fluttuazioni intorno al suo valor medio e brevi intense escursioni intermittenti. ■

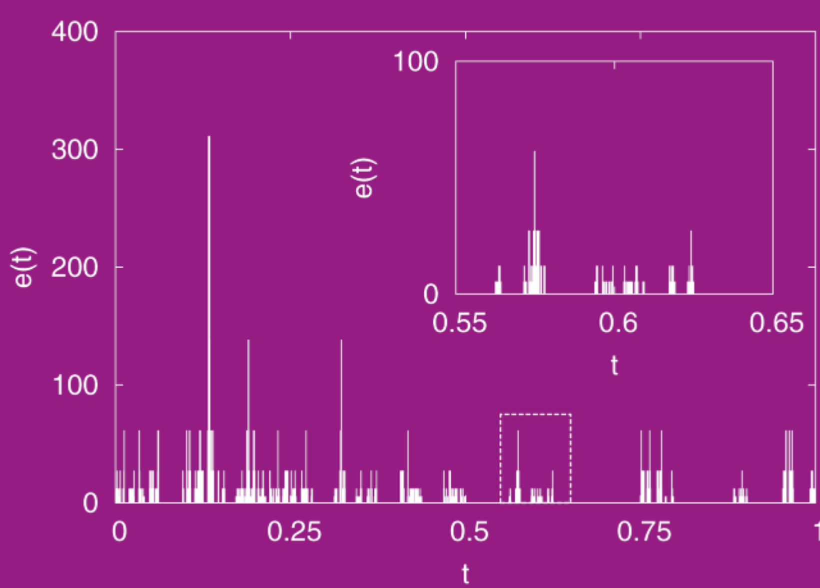


FIGURA 3: L'ENERGIA DISSIPATA IN FLUIDO TURBOLENTO N FUNZIONE DEL TEMPO. SI NOTI COME L'INGRANDIMENTO DI UNA PARTE SIA SIMILE AL TUTTO (CORTESIA DI ANGELO VULPIANI)