Per calcolare il numero delle componenti indipendenti della matrice densità, osserviamo che fra le combinazioni possibili dei valori degli indici λ, μ, . . . (o degli indici ρ, σ, . . .) soltanto $2s + 1$ sono essenzialmente distinte. Tenendo anche presente che le componenti dello spinore $\rho^{\lambda\mu\cdots}{}_{\rho\sigma\ldots}$ sono legate dalla relazione (59,7), troviamo che il numero delle componenti distinte è uguale a $(2s + 1)^2 - 1 = 4s(s + 1)$. Benché queste componenti siano grandezze complesse, questa circostanza, in virtú delle relazioni (59,8), non aumenta il numero totale delle grandezze indipendenti che caratterizzano lo stato di polarizzazione parziale della particella ed è uguale, quindi, a $4s(s + 1)$[1]. Notiamo a titolo di confronto che lo stato di polarizzazione totale di una particella è descritto in tutto da $4s$ grandezze ($2s + 1$ componenti complesse della funzione d'onda $\psi^{\lambda\mu}$, che sono legate da una condizione di normalizzazione e che contengono una fase comune non essenziale per la descrizione dello stato).

Come ogni spinore di rango $4s$, lo spinore $\rho^{\lambda\mu\cdots}{}_{\rho\sigma\ldots}$ è equivalente all'insieme di tensori irriducibili di rango $4s$, $4s - 2$, . . ., 0. Nel caso considerato si ha un solo tensore corrispondente a ciascuno di questi ranghi, poiché a causa delle proprietà di simmetria dello spinore $\rho^{\lambda\mu\cdots}{}_{\rho\sigma\ldots}$ ogni sua contrazione può essere eseguita in un solo modo: rispetto ad uno (qualsiasi) degli indici λ, μ, . . . e ad uno degli indici ρ, σ, . . . Inoltre, lo scalare (tensore di rango 0) viene a mancare, riducendosi, per la condizione (59,7), all'unità.

§ 60. Inversione del tempo e teorema di Kramers

La simmetria del moto rispetto al cambiamento del segno del tempo si esprime in meccanica quantistica con il fatto che se ψ è la funzione d'onda di un certo stato stazionario del sistema, anche la funzione d'onda « invertita rispetto al tempo » (indichiamola con ψ^{inv}) descrive un certo stato possibile con la stessa energia. È stato detto alla fine del § 18 che ψ^{inv} coincide con la funzione complessa coniugata ψ^*. Questa affermazione peró si riferisce alle funzioni d'onda, allorché non si tenga conto dello spin delle particelle. In presenza dello spin essa richiede una precisazione.

Rappresentiamo la funzione d'onda di una particella con spin s in forma di uno spinore controvariante $\psi^{\lambda\mu\cdots}$ (di rango $2s$). Passando alle funzioni complesse coniugate $\psi^{\lambda\mu\cdots *}$, otteniamo, però, l'insieme di grandezze che si trasformano come componenti di uno spinore

---

[1]) L'assegnazione di queste grandezze è equivalente all'assegnazione dei valori medi delle componenti del vettore **s** e di tutte le loro potenze e prodotti per gruppi di 2, 3, . . ., $2s$ che non si riducono a potenze inferiori (vedi problema 3 del § 55).

covariante. Quindi all'operazione dell'inversione del tempo corrisponde il passaggio dalla funzione d'onda $\psi^{\lambda\mu\cdots}$ a una nuova funzione d'onda le cui componenti covarianti sono determinate come segue

$$\psi^{\text{inv}}_{\lambda\mu\cdots} = \psi^{\lambda\mu\cdots *}. \tag{60,1}$$

Per un insieme assegnato di valori degli indici λ, μ, . . . le componenti degli spinori co- e controvarianti corrispondono ai valori della proiezione del momento angolare, che si differenziano per il segno. Quindi in termini delle funzioni $\psi_{s\sigma}$ all'inversione del tempo corrisponde il passaggio da $\psi_{s\sigma}$ a $\psi_{s,\,-\sigma}$, come doveva essere, poiché il cambiamento del segno del tempo comporta l'inversione del momento angolare. La corrispondenza esatta è stabilita secondo la (60,1):

$$\psi^{\text{inv}}_{s,\,-\sigma} = \psi^*_{s\sigma}\,(-1)^{s-\sigma} \tag{60,2}$$

In altre parole, il cambiamento $\psi_{s\sigma} \rightarrow \psi^*_{s\sigma}$, richiesto dall'operazione dell'inversione del tempo significa il cambiamento[1])

$$\psi_{s\sigma} \rightarrow \psi_{s,\,-\sigma}\,(-1)^{s-\sigma}. \tag{60,3}$$

Nel ripetere due volte questa operazione abbiamo

$$\psi_{s\sigma} \rightarrow \psi_{s,\,-\sigma}\,(-1)^{s-\sigma} \rightarrow \psi_{s\sigma}\,(-1)^{s-\sigma}\,(-1)^{s+\delta} = \psi_{s\sigma}\,(-1)^{2s}.$$

In tal modo, la doppia inversione del tempo fa tornare la funzione d'onda al valore iniziale soltanto per spin intero, mentre per spin semintero essa cambia il segno della funzione d'onda.

Consideriamo un sistema arbitrario di particelle interagenti. Il momento angolare orbitale e di spin di tale sistema presi separatamente non si conservano, in generale, se si tiene conto delle interazioni relativistiche. Si conserva soltanto il momento angolare totale **J**. Se non esiste alcun campo esterno, ciascun livello energetico del sistema è $(2J + 1)$ volte degenere. Se si applica un campo esterno, questa degenerazione, in generale, viene rimossa. Sorge allora il problema se si possa rimuovere completamente la degenerazione, cioè in modo tale che il sistema abbia soltanto livelli semplici. Questa questione è strettamente legata con la simmetria rispetto all'inversione del tempo.

Nell'elettrodinamica classica si ha l'invarianza delle equazioni rispetto al cambiamento del segno del tempo se si lascia invariato il campo elettrico e se si cambia il segno del campo magnetico[2]).

---

[1]) Richiamiamo l'attenzione sulla corrispondenza della regola di coniugazione complessa di una funzione sferica, conformemente alla (28,9), con la regola generale (60,3).

[2]) Vedi vol. II, *Teoria dei campi*, § 17. Vedi anche la osservazione alla fine del § 111.

Questa proprietà fondamentale del moto deve conservarsi anche nella meccanica quantistica. Quindi la simmetria rispetto all'inversione del tempo si ha non soltanto per un sistema chiuso, ma anche in ogni campo elettrico esterno (in mancanza di campo magnetico).

Le funzioni d'onda del sistema sono spinori $\psi^{\lambda\mu\cdots}$ il cui rango n è uguale al doppio della somma degli spin di tutte le particelle ($n = 2\sum s_a$); questa somma può non coincidere con lo spin totale S del sistema. Secondo quanto detto sopra, possiamo affermare che in un campo elettrico arbitrario la funzione d'onda e la funzione che da essa si ottiene per inversione temporale devono corrispondere a stati con la stessa energia. Perché il livello non sia degenere, occorre comunque che questi stati siano identici, cioè le corrispondenti funzioni d'onda debbano coincidere a meno di un fattore costante. È ovvio che tutte e due le funzioni devono essere espresse in forma di spinori dello stesso tipo (co- o controvarianti).

Scriviamo $\psi^{\text{inv}}_{\lambda\mu}\ldots = C\psi_{\lambda\mu}\ldots$, oppure secondo la (60,1),

$$\psi^{\lambda\mu\ldots *} = C\psi_{\lambda\mu\ldots}, \tag{60,4}$$

dove C è costante. Passando alle quantità complesse coniugate nei due membri di questa uguaglianza, otteniamo

$$\psi^{\lambda\mu\ldots} = C^*\psi^*_{\lambda\mu\ldots}.$$

Abbassiamo gli indici nel primo membro dell'uguaglianza, alzandoli corrispondentemente nel secondo. Questo significa che moltiplichiamo entrambi i membri dell'uguaglianza per $g_{\alpha\lambda}g_{\beta\mu}\cdots$ e che sommiamo rispetto agli indici λ, μ, ...; nel secondo membro si utilizza:

$$g_{\alpha\lambda}g_{\beta\mu}\ldots = (-1)^n g^{\lambda\alpha}g^{\mu\beta}\cdots$$

Come risultato otteniamo

$$\psi_{\lambda\mu\ldots} = C^*(-1)^n\psi^{\lambda\ldots\mu *}.$$

Sostituendo $\psi^{\lambda\mu\ldots *}$ dalla (60,4), troviamo

$$\psi_{\lambda\mu\ldots} = (-1)^n CC^*\psi_{\lambda\mu\ldots}.$$

Questa uguaglianza deve verificarsi identicamente, cioè deve essere $(-1)^n CC^* = 1$. Ma poiché $|C|^2$ è comunque positivo, è chiaro che questo è possibile soltanto per n pari (cioè per un valore intero della somma $\sum s_a$). Per n dispari (per un valore semintero di $\sum s_a$)[1]) la condizione (60,4) non può essere soddisfatta.

Siamo giunti quindi al risultato che il campo elettrico può rimuovere completamente la degenerazione soltanto dei sistemi per i

[1]) Se la somma $\sum s_a$ è intera (semintera) sono interi (seminteri) anche tutti i valori possibili dello spin totale S del sistema.

quali la somma degli spin delle particelle è intera. Un sistema con somma semintera degli spin deve avere in un campo elettrico arbitrario tutti i livelli doppiamente degeneri e, inoltre, a due stati distinti con la stessa energia corrispondono gli spinori complessi coniugati[1]) (*H. A. Kramers*, 1930).

Facciamo ancora un'osservazione di carattere matematico. Le relazioni del tipo (60,4) con la costante reale C rappresentano, dal punto di vista matematico, la condizione che si possa far corrispondere alle componenti dello spinore una combinazione di certe grandezze reali; tale condizione si può chiamare condizione di « realtà » dello spinore[2]). L'impossibilità di soddisfare la relazione (60,4) per n dispari significa che a nessun spinore di rango dispari si può far corrispondere una grandezza reale. Viceversa, per n pari la condizione (60,4) può essere soddisfatta e C può essere reale. In particolare, a uno spinore simmetrico di rango due si può far corrispondere un vettore reale se viene soddisfatta la condizione (60,4) con $C = 1$:

$$\psi^{\lambda\mu *} = \psi_{\lambda\mu}$$

(è facile convincersene mediante le formule (57,8)-(57,9)). In generale, la condizione (60,4) con $C = 1$ è la condizione di « realtà » dello spinore simmetrico di rango pari qualsiasi.

---

[1]) Se il campo elettrico gode di un'alta simmetria (cubica), può aver luogo anche la degenerazione quadrupla (vedi § 99 e problema).

[2]) Letteralmente non ha senso parlare di realtà di uno spinore, poiché gli spinori complessi coniugati hanno leggi di trasformazione diverse.