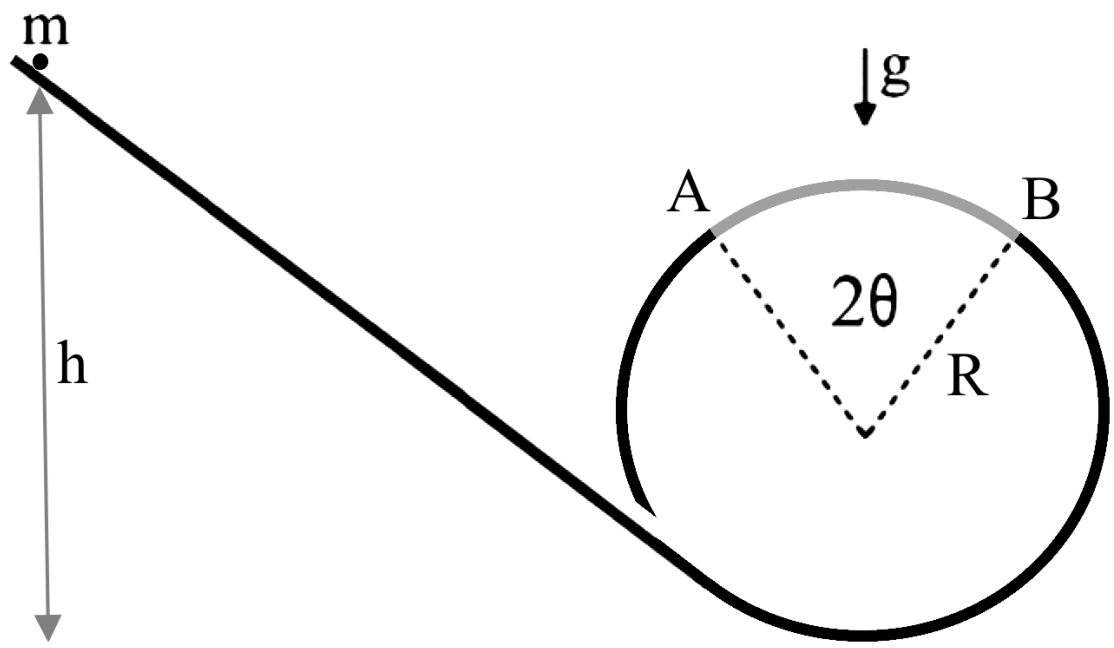
**Secondo Esonero di Meccanica Classica (14 marzo 2006)**




Una pallina di dimensioni trascurabili e massa $m$ è posta su una guida inclinata, priva di attrito, che termina con un anello circolare di raggio $R$; la quota $h$ da cui parte (a velocità iniziale nulla) è la minima necessaria a farle percorrere la guida senza mai staccarsi da essa.

1. Quanto vale $h$?

2. Se alla guida viene asportato un arco di circonferenza $AB$ di angolo al centro $2\theta$ (simmetrico rispetto al punto piú alto dell'anello, vedi figura) e la pallina viene nuovamente posta sulla guida inclinata ad altezza $h$ con velocità iniziale nulla, esistono scelte di $\theta$ tali che la pallina, dopo aver percorso un tratto in aria, rientri nella guida riprendendo a scorrere in essa? Quali?

**Soluzione**

**1.** L'equazione della dinamica è $m\vec{g}+\vec{N}=m\vec{a}$ dove $\vec{N}$ è la reazione vincolare, ortogonale al vincolo (quindi diretta lungo il raggio che istante per istante individua la posizione della pallina sull'anello); $m\vec{g}$ la forza peso, diretta lungo la verticale; $\vec{a}$ l'accelerazione della pallina. Quando la posizione della pallina sull'anello corrisponde a un angolo $\alpha$ con l'asse verticale, la proiezione dell'equazione lungo quel raggio fornisce $mg\cos\alpha + N = mv^2/R$ dove $a = v^2/R$ l'accelerazione centripeta. Che la pallina non si stacchi dalla guida equivale a dire che la reazione vincolare non si annulli ($N \geq 0$) per nessun $\alpha$: nemmeno nel punto piú alto dell'anello, dove la pallina arriva sempre piú lenta, la quota è $2R$ e l'angolo con la verticale è $\alpha = 0$. In quel punto la condizione $N \geq 0$ diventa $mv^2/R \geq mg$: affinché non si stacchi dalla guida, la pallina deve arrivare in cima all'anello almeno con velocità $v_{\min} = \sqrt{Rg}$; deve perciò partire da una quota $h$ tale che $mgh = \frac{1}{2}\, m\, v_{\min}^2 + 2mgR$, da cui si ottiene che la quota minima è $h = \frac{5}{2}R$.

**2.** Asportato l'arco $AB$, la pallina partita a quota $h = \frac{5}{2}R$ esce dalla guida nel punto $B$, a quota $R\,(1+\cos\theta)$, con energia cinetica $\frac{1}{2}mv^2 = mgh - mgR\,(1+\cos\theta) = \frac{5}{2}mgR - mgR\,(1+\cos\theta)$, quindi con modulo quadro della velocità $v^2 = gR(3-\cos\theta)$. Per riprendere la propria corsa nella guida la pallina deve percorrere una parabola tale da "atterrare" nel punto $A$ con velocità orizzontale $v_x$ uguale e con velocità verticale $v_y$ opposta a quella che aveva in $B$; ciò accade solo se la cima della parabola percorsa dalla pallina si trova a metà strada fra $B$ ed $A$, ovvero se il tempo $\Delta t$ che la pallina impiega a volare da $B$ alla quota massima è uguale al tempo impiegato a percorrere metà della distanza orizzontale da $B$ ad $A$: $\Delta t = v_y/g = R\sin\theta/v_x \;\Rightarrow\; v_x v_y = gR\sin\theta$; poiché $v_x = v\sin\theta$ e $v_y = v\cos\theta$ e $v^2 = gR(3-\cos\theta)$, la condizione si traduce nell'equazione $2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$ che ha le due soluzioni $\cos\theta = \frac{1}{2}$, ovvero $\theta = 60^\circ$, e $\cos\theta = 1$ ovvero $\theta = 0$ (soluzione banale: arco di misura nulla = nessuna interruzione della guida).