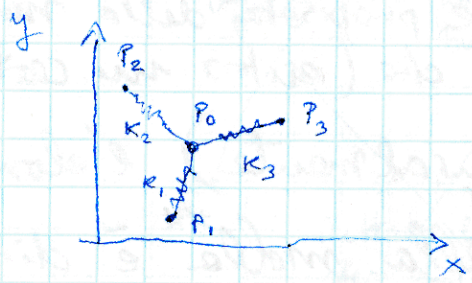


Esercizio 1

3 molle di costanti $k_1 k_2 k_3$ e lunghezza di riposo nulla sono con un'estremità attaccate ai tre chiodi $P_1 P_2 P_3$ (noti) e attaccate fra loro all'altra estremità P_0.
Qual è la posizione di P_0 all'equilibrio?

$$\vec{F} = k_1 (\vec{P_0 P_1}) + k_2 (\vec{P_0 P_2}) + k_3 (\vec{P_0 P_3}) = 0$$

$$\begin{cases} k_1 (x_1 - x_0) + k_2 (x_2 - x_0) + k_3 (x_3 - x_0) = F_x \\ k_1 (y_1 - y_0) + k_2 (y_2 - y_0) + k_3 (y_3 - y_0) = F_y \end{cases}$$

$F_x = 0 \Rightarrow$
$F_y = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 = (k_1 + k_2 + k_3) x_0 \\ k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3 = (k_1 + k_2 + k_3) y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3}{k_1 + k_2 + k_3} \\ y_0 = \dfrac{k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3}{k_1 + k_2 + k_3} \end{cases}$$

ESERCIZIO 2

1 rotazione / 24 ore

$$\omega_{ROT} = \frac{2\pi}{T_{ROT}} = \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60} \simeq 7 \times 10^{-5}\ s^{-1}$$

$$R_{ROT} \simeq 6000\ Km = 6 \times 10^{6}\ m$$

$$a_{ROT} = \omega_{ROT}^2 R_{ROT} \simeq 3 \times 10^{-2}\ m/s^2$$ ⟸ (all'Equatore e dintorni! e da noi? ma questa è la stima più pessimistica)

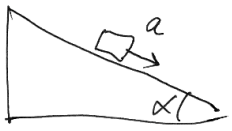
1 rivoluzione / 365 giorni

$$\omega_{RIV} = \frac{2\pi}{T_{RIV}} = \frac{2\pi}{365 \times 24 \times 60 \times 60} = \frac{\omega_{ROT}}{365} \simeq 2 \times 10^{-7}$$

$$\bar{R}_{RIV} \simeq 150 \times 10^{6}\ Km = 1.5 \times 10^{8}\ Km = 1.5 \times 10^{11}\ m$$

$$[\bar{v} \simeq \omega_{RIV} \bar{R}_{RIV} = 3 \times 10^{4}\ m/s = 30\ Km/s]$$

$$a_{RIV} \simeq \omega_{RIV}^2 \bar{R}_{RIV} = 6 \times 10^{-3}\ m/s^2$$



$$a_{ROT} \simeq 3 \times 10^{-2}\ m/s^2$$
$$a_{RIV} \simeq 6 \times 10^{-3}\ m/s^2$$

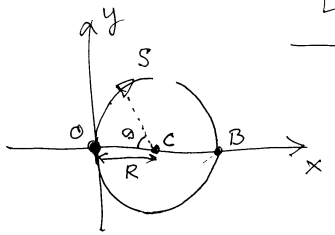
$$a = g \sin\alpha \simeq 3 \times 10^{-1}\ m/s^2$$

(=10 volte + grande di $a_{ROT} \simeq 5\, a_{RIV}$)

$$\sin\alpha = \frac{3 \times 10^{-1}\ m/s^2}{9.8\ m/s^2} \simeq 3 \times 10^{-2}$$

$$\alpha \simeq 3 \times 10^{-2}$$

ESERCIZIO 3



$C: (1\,m, 0)$

$R = 1\,m$

a_τ = costante = $\frac{\pi}{2}\,m/s^2$

$\theta = s/R$; verso positivo orario

$$\begin{cases} x(s) = -R\cos\left(\frac{s}{R}\right) + R \\ y(s) = R\sin\left(\frac{s}{R}\right) \end{cases}$$

(Scegliere invece per il verso positivo antiorario si prende $y(s) = -R\sin\left(\frac{s}{R}\right)$)

parte da fermo in (0,0);

accelerazione tangenziale = $a_\tau = \ddot{s} = \frac{d^2s}{dt^2}$ = costante

$\Rightarrow \quad \dot{s}(t) = a_\tau t \quad ; \quad s(t) = \frac{1}{2}a_\tau t^2$

3.1. $s(t^*) = \pi R \Rightarrow \frac{1}{2}a_\tau t^{*2} = \pi R \Rightarrow t^* = \sqrt{\frac{2\pi R}{a_\tau}}$

$= \sqrt{\frac{2\pi \cdot 1m}{\frac{\pi}{2}\,m/s^2}} = 2\,s$

3.2. $\dot{s}(t) = a_\tau t^* = \frac{\pi}{2}\,m/s^2 \cdot 2\,s = \pi\ m/s = v_s(t^*)$

3.3. $a_n(t^*) = \frac{v_s^2(t^*)}{R} = \frac{\pi^2 m^2/s^2}{1\,m} = \pi^2\,m/s^2$

3.4. ovviamente $\frac{\pi}{2}\,m/s^2$, essendo costante

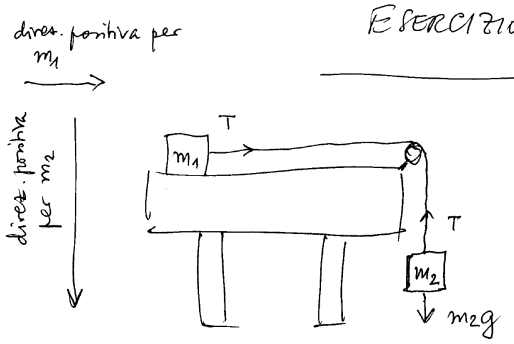
3.5. Si potrebbe fare tutto il conto ma essendo $s(t^*)$ un punto notevole (il punto B del disegno), è chiaro che lì l'accelerazione tangenziale punta in basso (in alto se il punto girasse in verso opposto) e quella radiale verso sinistra; quindi $\vec{a} = a_\tau(-\hat{y}) + a_n(-x) = (a_n, a_\tau)$. Modulo: $\sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\pi^4 + \frac{\pi^2}{4}}\,m/s^2 = \pi\sqrt{\pi^2 + \frac{1}{4}}\,m/s^2$

Versore: $\left(-\frac{a_n}{\pi\sqrt{\dots}\,m/s^2}, -\frac{a_\tau}{\pi\sqrt{\dots}\,m/s^2}\right) =$

$= \left(-\frac{\pi^2\,m/s^2}{\pi\sqrt{\pi^2+\frac{1}{4}}\,m/s^2}, -\frac{\frac{\pi}{2}\,m/s^2}{\pi\sqrt{\pi^2+\frac{1}{4}}\,m/s^2}\right) =$

$= \left(-\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+\frac{1}{4}}}, -\frac{1/2}{\sqrt{\pi^2+\frac{1}{4}}}\right)$

ESERCIZIO 5



Soluzione

$$F_2 = m_2 a_2 = m_2 g - T$$
$$F_1 = m_1 a_1 = T$$

$m_2 a_2 = m_2 g - m_1 a_1$ ma coi versi presi $a_1 = a_2 = a$ (>0), quindi $(m_1 + m_2) a = m_2 g$ ovvero $a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g$. I casi limite servono anche da controprova che la soluzione sia sensata:

A) $m_2 \ll m_1$ $\quad \frac{m_2}{m_1} \ll 1$ $\quad a = \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{1}{1+\frac{m_2}{m_1}}\right) g = \frac{m_2}{m_1}\left[1 - \frac{m_2}{m_1} + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - \cdots\right] g$ SVILUPPO DI TAYLOR

$$a \simeq \frac{m_2}{m_1} g \,, \quad \lim_{\frac{m_2}{m_1} \to 0} a = 0$$

Cioè se la massa m_1 è molto molto maggiore di m_2 la sua accelerazione è molto molto minore di g; al limite è zero

B) $m_2 \gg m_1$ $\quad \frac{m_1}{m_2} \ll 1$ $\quad a = \frac{g}{1+\frac{m_1}{m_2}} = \left[1 - \frac{m_1}{m_2} + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 - \cdots\right]$ SVILUPPO DI TAYLOR

$$a \simeq g \,, \quad \lim_{\frac{m_1}{m_2} \to 0} a = g$$

Cioè se m_2 è molto maggiore di m_1 la sua accelerazione è vicina a g; è esattamente uguale a g nel limite $\frac{m_1}{m_2} \to 0$.

Nel limite A la massa m_1 è come un muro a cui è attaccato il filo, e perciò la massa m_2 sta ferma; nel limite B la massa m_1 sparisce e m_2 scende in caduta libera: OK.