

Equazioni di Newton per le masse 1 e 2

$$3m\ddot{x}_1 = -Kx_1 + K(x_2 - x_1) = -2Kx_1 + Kx_2$$

$$2m\ddot{x}_2 = -K(x_2 - x_1) = Kx_1 - Kx_2$$

$$\begin{pmatrix} 3m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2K & -K \\ -K & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{M}} \ddot{\underline{\underline{x}}} = - \underline{\underline{K}} \underline{\underline{x}}$$

matrice 2x2
↙ ↘

in un modo normale $\rightarrow x_1 = Cq_{01} \cos(\omega t + \varphi), x_2 = Cq_{02} \cos(\omega t + \varphi)$

ovvero $\rightarrow \ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 = -\lambda x_1; \ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2 = -\lambda x_2 \quad (\lambda = \omega^2)$

in forma compatta $-\lambda \underline{\underline{M}} \underline{\underline{x}} = -\underline{\underline{K}} \underline{\underline{x}} \Rightarrow (\underline{\underline{K}} - \lambda \underline{\underline{M}}) \underline{\underline{x}} = 0 \Rightarrow \det(\underline{\underline{K}} - \lambda \underline{\underline{M}}) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} 2K - 3m\lambda & -K \\ -K & K - 2m\lambda \end{pmatrix} = 0$$

imponendo $\det=0$
trovo gli
autovalori

$$(2K - 3m\lambda)(K - 2m\lambda) - K^2 = 0$$

$$2K^2 - 3mK\lambda - 4mK\lambda + 6m^2\lambda^2 - K^2 = 0$$

$$6m^2\lambda^2 - 7mK\lambda + K^2 = 0$$

$$6\lambda^2 - 7\frac{K}{m}\lambda + \left(\frac{K}{m}\right)^2 = 0; \quad \lambda = \frac{7\frac{K}{m} \pm \sqrt{49\left(\frac{K}{m}\right)^2 - 24\left(\frac{K}{m}\right)^2}}{12} =$$

$$= \frac{K}{m} \frac{7 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{K}{m} \frac{7 \pm 5}{12}$$

AUTOVALORI

$$\lambda_1 = \frac{K}{m} \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \frac{K}{m}; \quad \lambda_2 = \frac{K}{m} \frac{12}{12} = \frac{K}{m}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{K}{m}}; \quad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

1° autovettore

$$\begin{pmatrix} 2K - 3m\lambda_1 & -K \\ -K & K - 2m\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{01} \\ q_{02} \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(2K - 3m \frac{K}{m} \frac{1}{6}\right) q_{01} - K q_{02} = 0 \quad \left(2K - \frac{K}{2}\right) q_{01} = K q_{02}$$

$$\frac{q_{02}}{q_{01}} = \frac{3}{2}$$

normalizzazione:

$$(Cq_{01}, Cq_{02}) \begin{pmatrix} 3m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Cq_{01} \\ Cq_{02} \end{pmatrix} = 1$$

$$1 = (Cq_{01}, Cq_{02}) \begin{pmatrix} 3m Cq_{01} \\ 2m Cq_{02} \end{pmatrix} = mC^2 (3q_{01}^2 + 2q_{02}^2) = mC^2 (3 \cdot 4 + 2 \cdot 9) =$$

$$= 1 = mC^2 \cdot 30 \Rightarrow C^2 = \frac{1}{30} \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{30}}; \quad a_{..} = \frac{2}{\sqrt{30}} \quad a_{..} = \frac{3}{\sqrt{30}}$$

1° Autovettore normalizzato:

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{30m}} \\ \frac{3}{\sqrt{30m}} \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$= \vec{q}_0^{(1)} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

2° autovettore

$$\begin{pmatrix} 2k - 3m\lambda_2 & -k \\ -k & k - 2m\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{01} \\ q_{02} \end{pmatrix} = 0 \quad \lambda_2 = \frac{k}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2k - 3m\lambda_2 = 2k - 3m \frac{k}{m} = -k$$

$$k - 2m\lambda_2 = k - 2m \frac{k}{m} = -k$$

$$\begin{pmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{01} \\ q_{02} \end{pmatrix} = 0 \quad -kq_{01} - kq_{02} = 0$$

$$\Rightarrow q_{02} = -q_{01} \quad \text{ovvero} \quad \frac{q_{02}}{q_{01}} = -1$$

normalizzazione: $1 = (cq_{01}, cq_{02}) \begin{pmatrix} 3m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cq_{01} \\ cq_{02} \end{pmatrix} =$

$$= (c, -c) \begin{pmatrix} 3mc \\ -2mc \end{pmatrix} = 3mc^2 + 2mc^2 = 5mc^2 = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{5m}}$$

2° Autovettore normalizzato:

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5m}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5m}} \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$= \vec{q}_0^{(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

verifica normalizzazione:

$$\begin{aligned} \vec{q}_0^{(1)} M \vec{q}_0^{(1)} &= \left(\frac{2}{\sqrt{30m}}, \frac{3}{\sqrt{30m}} \right) \begin{pmatrix} 3m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{30m}} \\ \frac{3}{\sqrt{30m}} \end{pmatrix} = \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{30m}}, \frac{3}{\sqrt{30m}} \right) \begin{pmatrix} \frac{6m}{\sqrt{30m}} \\ \frac{6m}{\sqrt{30m}} \end{pmatrix} = \frac{12m}{30m} + \frac{18m}{30m} = 1 : \underline{\text{ok}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{q}_0^{(2)} M \vec{q}_0^{(2)} &= \left(\frac{1}{\sqrt{5m}}, -\frac{1}{\sqrt{5m}} \right) \begin{pmatrix} 3m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5m}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5m}} \end{pmatrix} = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{5m}}, -\frac{1}{\sqrt{5m}} \right) \begin{pmatrix} \frac{3m}{\sqrt{5m}} \\ -\frac{2m}{\sqrt{5m}} \end{pmatrix} = \frac{3m}{5m} + \frac{2m}{5m} = 1 : \underline{\text{ok}} \end{aligned}$$

verifica ortogonalità:

$$\begin{aligned} \vec{q}_0^{(1)} M \vec{q}_0^{(2)} &= \left(\frac{2}{\sqrt{30m}}, \frac{3}{\sqrt{30m}} \right) \begin{pmatrix} 3m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5m}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5m}} \end{pmatrix} = \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{30m}}, \frac{3}{\sqrt{30m}} \right) \begin{pmatrix} \frac{3m}{\sqrt{5m}} \\ -\frac{2m}{\sqrt{5m}} \end{pmatrix} = \frac{m}{30m\sqrt{5m}} \cdot (2 \cdot 3 - 3 \cdot 2) = 0 : \underline{\text{ok}} \end{aligned}$$

(4)

Moto generico: combinazione lineare dei due modi normali

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A_1 \vec{q}^{(1)} + A_2 \vec{q}^{(2)} \quad \left(\text{alt: } [q_0^{(1)}] = [q_0^{(2)}] = M^{-1/2}; \right. \\ \left. [A_1] = [A_2] = L M^{1/2} \right)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A_1 \vec{q}_0^{(1)} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \vec{q}_0^{(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = -A_1 \omega_1 \vec{q}_0^{(1)} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \omega_2 \vec{q}_0^{(2)} \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$T = \frac{1}{2} (\dot{x}_1, \dot{x}_2) \begin{pmatrix} 3m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} [A_1^2 \omega_1^2 \sin^2(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \omega_2^2 \sin^2(\omega_2 t + \varphi_2)]$$

$$V = \frac{1}{2} (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (A_1 \vec{q}_1 + A_2 \vec{q}_2) \underline{k} (A_1 \vec{q}_1 + A_2 \vec{q}_2) =$$

$$= \frac{1}{2} (A_1 \vec{q}_1 + A_2 \vec{q}_2) \begin{pmatrix} 3m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix} (A_1 \omega_1^2 \vec{q}_1 + A_2 \omega_2^2 \vec{q}_2) =$$

$$= \frac{1}{2} (A_1^2 \omega_1^2 q_1^2 + A_2^2 \omega_2^2 q_2^2) =$$

$$= \frac{1}{2} [A_1^2 \omega_1^2 \cos^2(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2^2 \omega_2^2 \cos^2(\omega_2 t + \varphi_2)]$$

$$E_m = T + V = \frac{1}{2} (A_1^2 \omega_1^2 + A_2^2 \omega_2^2) = \text{costante};$$

giustamente, perché tutte le forze sono conservative.

E_m non dipende dal tempo e si conserva durante il moto.

- Come si vede, una stessa energia meccanica si può ottenere con una qualsiasi combinazione dei due modi normali tale che $A_1^2 \omega_1^2 + A_2^2 \omega_2^2$ sia costante.
- Come si scrive con una qualsiasi scelta di A_1 e A_2 l'energia potenziale associata alla molla tra le due masse?

$$V_{molla_{1-2}} = \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2$$

$$x_1 = A_1 q_{01}^{(1)} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 q_{01}^{(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$x_2 = A_1 q_{02}^{(1)} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 q_{02}^{(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$x_2 - x_1 = A_1 (q_{02}^{(1)} - q_{01}^{(1)}) \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 (q_{02}^{(2)} - q_{01}^{(2)}) \cos(\omega_2 t + \varphi_2) =$$

$$= A_1 \left(\frac{3}{\sqrt{30m}} - \frac{2}{\sqrt{30m}} \right) \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \left(-\frac{1}{\sqrt{5m}} - \frac{1}{\sqrt{5m}} \right) \cos(\omega_2 t + \varphi_2) =$$

$$= A_1 \frac{1}{\sqrt{30m}} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \frac{2}{\sqrt{5m}} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5m}} \left[A_1 \frac{1}{\sqrt{6}} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - 2A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \right]$$

$$\begin{aligned}
\langle V_{\text{molla } 1-2} \rangle &= \frac{1}{2} k \langle (x_2 - x_1) \rangle^2 = \\
&= \frac{1}{2} k \cdot \frac{1}{5m} \left[\frac{A_1^2}{6} \cdot \frac{1}{2} + 4A_2^2 \cdot \frac{1}{2} \right] = \\
&= \frac{1}{10} \left[\frac{k}{m} \cdot \frac{1}{6} A_1^2 \frac{1}{2} + \frac{k}{m} \cdot 2A_2^2 \right] = \\
&= \frac{1}{10} \left[A_1^2 \omega_1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2A_2^2 \omega_2^2 \right] = \\
&= \frac{1}{10} \left[\frac{1}{2} A_1^2 \omega_1^2 + 2A_2^2 \omega_2^2 \right] = \\
&= \frac{1}{10} \left[\frac{1}{12} A_1^2 + 2A_2^2 \right] \frac{k}{m}
\end{aligned}$$

► Come si vede, il regime in cui l'energia ^{(della molla fra le masse} media a parte di energia meccanica totale, è minima, è quello in cui $A_2 = 0$ e $A_1 = 1$, cioè il modo normale #1. *

► Per ottenere un moto di questo tipo bisogna ad esempio partire da fermi con una distorsione proporzionale al suo autovettore. Ad esempio $\dot{x}_1(t=0) = \dot{x}_2(t=0) = 0$; $x_1(t=0) = 2L$, $x_2(t=0) = 3L$, $L = \text{lunghezza qualunque}$.
 * la risposta si poteva ottenere qualitativamente, osservando che in uno dei due modi le masse si muovono in controfase, nell'altra in fase.