

Teoremi del centro di massa

Equazioni cardinali della dinamica dei sistemi

$$M = \sum_{i=1}^N m_i \quad \frac{dm_i}{dt} = 0$$

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^N \vec{q}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_c \quad (1^\circ \text{ TEO})$$

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{q}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i = M \vec{a}_c \quad (2^\circ \text{ TEO})$$

Newton: $\frac{d\vec{q}_i}{dt} = \vec{f}_i$

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{f}_i = \vec{F} = \vec{F}^{\text{int}} + \vec{F}^{\text{ext}} \quad \left(\vec{f}_i = \vec{f}_i^{\text{int}} + \vec{f}_i^{\text{ext}} \right)$$

ma $\sum_{i=1}^N \vec{f}_i^{\text{int}} = \vec{F}^{\text{int}} = 0$, perché $\vec{f}_{21} = \vec{f}_{12}$, eccetera

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = M \vec{a}_c = \vec{F}^{\text{ext}} \quad 1^\circ \text{ EQ. CARDIN.}$$

→ Corollario: se $\vec{F}^{\text{ext}} = 0$, $\vec{Q} = \text{costante}$ e il centro di massa si muove di moto r.u.

→ Formulazione alternativa (contemporanea) del 3° principio

$$\vec{P}_\Omega = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega) \times \vec{q}_i = \vec{P}_c + (\vec{r}_c - \vec{r}_\Omega) \times M \vec{v}_c \quad (3^\circ \text{ TEO})$$

$$\frac{d\vec{P}_\Omega}{dt} = -\vec{v}_\Omega \times \vec{Q} + \vec{M}_\Omega, \quad \vec{M}_\Omega = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega) \times \vec{f}_i$$

$$\vec{M}_\Omega = \vec{M}_\Omega^{\text{int}} + \vec{M}_\Omega^{\text{ext}}, \quad \text{ma } \vec{M}_\Omega^{\text{int}} = 0, \text{ perché}$$

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_\Omega) \times \vec{f}_{12} + (\vec{r}_2 - \vec{r}_\Omega) \times \vec{f}_{21} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{f}_{12} = 0, \text{ eccetera}$$

$$\frac{d\vec{P}_\Omega}{dt} = \underbrace{-\vec{v}_\Omega \times \vec{Q}}_{\text{questo si annulla con opportuna scelta di } \Omega \text{ nella maggioranza dei casi}} + \vec{M}_\Omega^{\text{ext}} \quad 2^\circ \text{ EQ. CARD.}$$

→ Corollario: se $\vec{M}_\Omega^{\text{ext}} = 0$,

$\vec{P}_\Omega$ è costante (si conserva)

→ 1ª+2ª EQ. CARD.: se $\vec{f}_i^{\text{ext}} = 0 \quad \forall i$, $\vec{F}^{\text{ext}} = 0 \quad (\underline{\underline{E}}) \quad \vec{M}_\Omega^{\text{ext}} = 0$
(SISTEMA ISOLATO)

⇒ $\vec{Q} \in \vec{P}_\Omega$ si conservano

→ $\vec{P}_\Omega$? in realtà si conserva $\vec{P}$ rispetto a qualsiasi polo quando le $\vec{f}_i^{\text{ext}}$ sono individualmente tutte nulle.