

$$|c_f^{(1)}(t)|^2 \simeq 4\pi^2 \alpha t |\hat{\varepsilon} \cdot \vec{M}_{fi}|^2 \frac{I_o}{\omega_o^2} \delta(\omega_{fi} - \omega_o) \quad (1.31)$$

$$|c_{f'}^{(1)}(t)|^2 \simeq 4\pi^2 \alpha t |\hat{\varepsilon} \cdot \vec{M}_{if'}^*|^2 \frac{I_o}{\omega_o^2} \delta(\omega_{f'i} + \omega_o) \quad (1.32)$$

A questo risultato ci si riferisce spesso come “regola d’oro di Fermi” (per il caso in cui la perturbazione sia un’onda piana). Esso esprime la conservazione dell’energia.

Dal punto di vista di un esperimento reale il risultato appare improbabile: se la pulsazione dell’onda non è quella giusta la probabilità viene zero, ma se è giusta, per via della delta di Dirac, viene infinita; il che, per una probabilità che dovrebbe essere compresa fra zero e uno, non va bene.

Il fatto è che una sorgente reale non produce un’onda esattamente monocromatica: l’intensità totale I_o è sempre distribuita su un intervallo piú o meno largo $\Delta\omega$ attorno a una frequenza centrale ω_o ; un modello rozzo ma semplice è per esempio una sorgente con spettro rettangolare: $I(\omega) = I_o/\Delta\omega$ per $\omega_o - \Delta\omega/2 < \omega < \omega_o + \Delta\omega/2$, e zero altrimenti.

$I(\omega)$ ha quindi le dimensioni di un’intensità diviso una pulsazione. Nel caso in cui questa distribuzione sia frutto della sovrapposizione incoerente di tante onde piane con frequenze lievemente diverse (il che è vero per gli esperimenti storici di cui parliamo, e, piú in generale, quando non abbiamo a che fare con sorgenti coerenti come i laser) l’intensità totale è la somma (l’integrale) delle intensità distribuite attorno a ω_o : $I_o = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega I(\omega)$, e le probabilità dei due casi di assorbimento ed emissione si ottengono integrando le rispettive equazioni in $d\omega$:

$$\begin{aligned} |c_f^{(1)}(t)|^2 &\simeq 4\pi^2 \alpha t |\hat{\varepsilon} \cdot \vec{M}_{fi}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{I(\omega)}{\omega^2} \delta(\omega_{fi} - \omega) = \\ &= 4\pi^2 \alpha t |\hat{\varepsilon} \cdot \vec{M}_{fi}|^2 \frac{I(\omega_{fi})}{\omega_{fi}^2} = t W_{if} \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} |c_{f'}^{(1)}(t)|^2 &\simeq 4\pi^2 \alpha t |\hat{\varepsilon} \cdot \vec{M}_{if'}^*|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{I(\omega)}{\omega^2} \delta(\omega_{f'i} + \omega) = \\ &= 4\pi^2 \alpha t |\hat{\varepsilon} \cdot \vec{M}_{if'}^*|^2 \frac{I(\omega_{if'})}{\omega_{if'}^2} = t W_{if'} \end{aligned} \quad (1.34)$$