L'ultima parola sull'elemento di matrice $\langle m|\Delta\hat{h}|i\rangle$

Giovanni B. Bachelet, 17 marzo 2016

Parto dalla formula 1.24 di pag. 27 del testo EFAMS, cioè da

$$\langle m|\Delta\hat{h}|i\rangle \;= -i\alpha A_{\rm o}\,\hat{\varepsilon}\cdot\Big[\;\langle m|\,{\rm e}^{i\vec{k}_{\rm o}\cdot\vec{r}}\,\vec{\nabla}|i\rangle\,{\rm e}^{-i\omega_{\rm o}t\,+\,i\varphi_{\rm o}} + \\ + \langle m|\,{\rm e}^{-i\vec{k}_{\rm o}\cdot\vec{r}}\,\vec{\nabla}|i\rangle\,{\rm e}^{i\omega_{\rm o}t\,-\,i\varphi_{\rm o}}\;\Big]\,.$$

Definisco l'elemento di matrice (costruito con ingredienti tutti spaziali)

$$\vec{M}_{mi}(\vec{k}_{\rm o}) = \langle m|\,{\rm e}^{i\vec{k}_{\rm o}\cdot\vec{r}}\,\vec{\nabla}|i\rangle = \int d^3r\;\psi_a^*(\vec{r})\,{\rm e}^{i\vec{k}_{\rm o}\cdot\vec{r}}\vec{\nabla}\psi_b(\vec{r})\,.$$

A questo punto l'equazione di partenza diventa

$$\langle m|\Delta\hat{h}|i\rangle = -i\alpha A_{\rm o}\hat{\varepsilon}\cdot\left[\vec{M}_{mi}(\vec{k}_{\rm o})\,{\rm e}^{-i\omega_{\rm o}t\,+\,i\varphi_{\rm o}} + \vec{M}_{mi}(-\vec{k}_{\rm o})\,{\rm e}^{i\omega_{\rm o}t\,-\,i\varphi_{\rm o}}\right]$$

Ora uso la definizione di $M_{mi}(\vec{k}_{\rm o})$, integro per parti, sfrutto la gauge di radiazione ($\hat{\varepsilon}\cdot\vec{k}_{\rm o} = 0$) e ottengo:

$$\boxed{\hat{\varepsilon}\cdot\vec{M}_{mi}(\vec{k}_{\rm o}) = -\hat{\varepsilon}\cdot\vec{M}^*_{im}(-\vec{k}_{\rm o}) \quad \text{ovvero} \quad \hat{\varepsilon}\cdot\vec{M}_{mi}(-\vec{k}_{\rm o}) = -\hat{\varepsilon}\cdot\vec{M}^*_{im}(\vec{k}_{\rm o})}\,.$$

Utilizzando questo risultato, l'equazione di partenza diventa

$$\langle m|\Delta\hat{h}|i\rangle = -i\alpha A_{\rm o}\hat{\varepsilon}\cdot\left[\vec{M}_{mi}(\vec{k}_{\rm o})\,{\rm e}^{-i\omega_{\rm o}t\,+\,i\varphi_{\rm o}} - \vec{M}^*_{im}(\vec{k}_{\rm o})\,{\rm e}^{i\omega_{\rm o}t\,-\,i\varphi_{\rm o}}\right],$$

consentendo l'atterraggio sull'equazione 1.25 di pag. 27, che è giusta anche se non vi appare esplicitamente la dipendenza da $\vec{k}_{\rm o}$. Tuttavia non esplicitare la dipendenza da $\vec{k}_{\rm o}$ e poi motivare il passaggio dalla Eq. 1.24 all'Eq. 1.25 (come scritto sul libro all'inizio di pag. 28) con l'affermazione che $\hat{\varepsilon}\cdot\vec{M}_{mi} = -\hat{\varepsilon}\cdot\vec{M}^*_{im}$ è un po' impreciso e fuorviante: io stesso, un anno e mezzo dopo aver scritto il libro, non mi raccapezzavo. Insomma l'uguaglianza va scritta per bene come ho fatto adesso, nell'equazione racchiusa dal rettangolo. Vale però la pena di osservare che l'affermazione $\hat{\varepsilon}\cdot\vec{M}_{mi} = -\hat{\varepsilon}\cdot\vec{M}^*_{im}$, a questo stadio imprecisa e fuorviante, diventa esatta dopo l'approssimazione di dipolo vista all'ultima lezione: infatti a quel punto

$$\vec{M}_{mi}(\vec{k}_{\rm o}) = \langle m|\,{\rm e}^{i\vec{k}_{\rm o}\cdot\vec{r}}\,\vec{\nabla}|i\rangle = \langle m|\left[1 + i\,\vec{k}_{\rm o}\cdot\vec{r} - \frac{1}{2}\left(\vec{k}_{\rm o}\cdot\vec{r}\right)^2 + \,...\right]\vec{\nabla}|i\rangle \simeq \langle m|\vec{\nabla}|i\rangle$$

e la dipendenza da $\vec{k}_{\rm o}$ di $\vec{M}_{mi}$ scompare. Ringrazio gli studenti che hanno seguito con tanta attenzione da identificare il problema: per merito loro lo correggerò nella prossima edizione.