

In unità atomiche $\hbar = e = m_e = 1$ la larghezza del pacchetto è $\sigma(t) = \sqrt{\sigma_o^2 + (t/2\sigma_o)^2}$. Per passare a unità del Sistema Internazionale (σ_o in metri e t in secondi) dobbiamo moltiplicare $t/2\sigma_o$ per $r_{\text{atom}}^2/t_{\text{atom}} = (5.29 \times 10^{-11} \text{ m})^2 / 2.42 \times 10^{-17} \text{ s} = 1.16 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$. Vediamo un po' che cosa succede dopo un secondo a un pacchetto gaussiano che a $t=0$ era largo un decimo di millimetro. Sostituendo i valori $\sigma_o = 10^{-4} \text{ m}$ e $t = 1 \text{ s}$ otteniamo $t/2\sigma_o \times 1.16 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s} = 0.58 \text{ m}$, e $\sigma(t) \simeq t/2\sigma_o = 0.58 \text{ m}$. In altre parole, il pacchetto d'onda nel giro di un secondo si allarga da un decimo di millimetro a quasi un metro. In queste circostanze il concetto di pacchetto d'onda è ancora utile come ponte fra la descrizione quantistica e quella classica? Sí, perché i tempi rilevanti per il moto degli elettroni sono molto, molto piú piccoli di un secondo. Un elettrone libero a temperatura ambiente, ad esempio, ha una velocità quadratica media $\langle v^2 \rangle = 3k_B T/m_e = 1.36 \times 10^{10} \text{ m}^2/\text{s}^2$ e quindi un modulo medio della velocità pari a $\sqrt{\langle v^2 \rangle} = 1.17 \times 10^5 \text{ m/s}$; a questa velocità l'elettrone in un secondo percorrerebbe 117 km; se poi l'elettrone viene accelerato in una d.d.p. di 100–1000 volt, la sua velocità può diventare dieci o cento volte maggiore ($10^6 - 10^7 \text{ m/s}$). Con queste velocità (che sono ancora molto lontane dalla velocità della luce, quindi una trattazione nonrelativistica è pienamente legittima) un elettrone percorre i ~ 25 centimetri di un tubo catodico in $2.5 \times 10^{-6} - 2.5 \times 10^{-8}$ secondi. Se inseriamo questo intervallo di tempi caratteristici nella formula della larghezza del pacchetto otteniamo $t/2\sigma_o \times 1.16 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s} = 1.45 \times (10^{-6} - 10^{-8}) \text{ m}$, e quindi $\sigma(t) \simeq \sigma_o = 10^{-4} \text{ m}$. Quindi, sulla distanza rilevante ai fini di una misura "balistica", la larghezza del pacchetto gaussiano rimane in pratica invariata, e l'elettrone si comporta come una pallina classica carica.