dove $\theta' = \theta - \theta_0$. Esprimendo l'integrale mediante la funzione di Ayri secondo la (b, 3), troviamo finalmente per la sezione di diffusione[1])

$$d\sigma = \frac{4\pi l_0}{\alpha^{2/3}k^2}\,\Phi^2\left(-\frac{\theta'}{\alpha^{1/3}}\right)d\theta'.$$

La sezione differenziale $d\sigma/d\theta'$ diminuisce inoltrandosi nella regione classicamente inaccessibile di diffusione ($\theta' > 0$ per $\alpha < 0$, o $\theta' < 0$ per $\alpha > 0$), mentre dall'altra parte del punto $\theta' = 0$ oscilla con ampiezza gradualmente decrescente. Il suo valore massimo si ottiene per $\theta'\alpha^{-1/3} = 1{,}02$, dove $\Phi^2 = 0{,}90$.

3. Determinare la distribuzione angolare di diffusione quasi-classica a piccoli angoli, se l'angolo di deflessione classico θ si annulla per un certo valore finito $\rho = l_0/k$.

Soluzione. Dall'ipotesi di quasi-classicità della diffusione nel caso considerato discende che $l_0 \gg 1$ e $\delta_{l_0} \gg 1$. Allora nella diffusione sono essenziali i valori di l vicini a l_0. Per $l' = l - l_0$ piccoli abbiamo

$$\delta_l \approx \delta_{l_0} + \frac{\beta}{2}l'^2$$

(allora, secondo la (127,3), $\theta = 0$ per $l' = 0$). Questa espressione va sostituita nella (127,1), e $P_l(\cos\theta)$ si può rappresentare nella forma (49,6). La somma rispetto a l va sostituita con l'integrazione in dl' intorno al punto $l' = 0$[2]):

$$f = \frac{l_0}{ik}\exp(2i\delta_{l_0})\int J_0(l\theta)\exp(i\beta l'^2)\,dl'.$$

L'integrale è determinato dalla regione $l' \sim \beta^{-1/2}$. Per gli angoli $\theta \ll \sqrt{\beta}$ si può portare la funzione $J_0(l\theta)$ fuori del segno di integrale sostituendola con il valore per $l = l_0$. L'integrale che resta si calcola come è stato spiegato nel testo. Per la sezione troviamo finalmente[3])

$$d\sigma = \frac{\pi l_0^2}{\beta k^2}J_0^2(l_0\theta)\,do.$$

Un risultato analogo si ottiene per la sezione di diffusione ad angoli vicini a π, se l'angolo di diffusione classico si riduce a π per un certo valore finito (non nullo) di ρ.

§ 128. Proprietà analitiche dell'ampiezza di diffusione

Alcune importanti proprietà dell'ampiezza di diffusione possono essere stabilite studiandole come funzione dell'energia della particella diffusa E, considerata formalmente come variabile complessa.

Consideriamo il moto di una particella in un campo $U(r)$ che si annulla con sufficiente rapidità all'infinito (preciseremo piú avanti il grado di rapidità richiesto). Per semplificare i ragionamenti

---

[1]) Questo tipo di diffusione si incontra nella teoria dell'iride e si chiama quindi diffusione *iridescente*.

[2]) A rigore, a questa ampiezza si deve aggiungere un termine corrispondente a un contributo alla diffusione per piccoli angoli da parte delle distanze d'urto $\rho \to \infty$. Ma questo contributo è in generale piccolo rispetto a quello scritto.

[3]) Questo tipo di diffusione è detto «aurora» per il fatto che lo si trova nella teoria di alcuni fenomeni meteorologici.

che seguono, supponiamo dapprima che il momento orbitale della particella sia zero: $l = 0$. Scriviamo la forma asintotica della funzione d'onda (che è la soluzione dell'equazione di Schrödinger per $l = 0$ per un dato valore arbitrario di E) come segue

$$\chi \equiv r\psi = A(E) \exp\left(-\frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} r\right) + B(E) \exp\left(\frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} r\right), \tag{128,1}$$

e consideriamo E come una variabile complessa; fissiamo allora $\sqrt{-E}$ come grandezza positiva per valori reali negativi di E. La funzione d'onda è supposta normalizzata con una certa condizione determinata, per esempio con la condizione $\psi(0) = 1$.

Sulla parte negativa dell'asse reale ($E < 0$) gli esponenti di entrambi i membri della (128,1) sono reali; uno di essi decresce e l'altro cresce per $r \to \infty$. Dalla condizione di realtà di χ segue che le funzioni $A(E)$ e $B(E)$ sono reali per $E < 0$; ne segue, che queste funzioni hanno valori complessi coniugati in ogni coppia di punti disposti simmetricamente rispetto all'asse reale:

$$A(E^*) = A^*(E), \quad B(E^*) = B^*(E). \tag{128,2}$$

Passando dal semiasse reale negativo al semiasse positivo attraverso il semipiano superiore, otteniamo un'espressione asintotica della funzione d'onda per $E > 0$ della forma

$$\chi = A(E) e^{ikr} + B(E) e^{-ikr}, \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}. \tag{128,3}$$

Se avessimo eseguito questo passaggio attraverso il semipiano inferiore avremmo ottenuto

$$\chi = A^*(E) e^{-ikr} + B^*(E) e^{ikr}.$$

Poiché χ deve essere una funzione monodroma di E, questo vuol dire che

$$A(E) = B^*(E) \quad \text{per} \quad E > 0 \tag{128,4}$$

(questa relazione risulta anche direttamente dal fatto che χ per $E > 0$ è reale). Tuttavia, poiché la radice $\sqrt{-E}$ nella (128,1) non è monodroma anche i coefficienti $A(E)$ e $B(E)$ non sono monodromi. Per eliminare questa mancanza di monodromia, tagliamo il piano complesso lungo il semiasse reale positivo. Questo taglio rende $\sqrt{-E}$ monodroma e assicura così la monodromia della definizione delle funzioni $A(E)$ e $B(E)$. Allora, sul bordo superiore e inferiore del taglio queste funzioni hanno valori complessi coniugati (nell'espressione (128,3) $A(E)$ e $B(E)$ sono prese sul bordo superiore del taglio).

Chiameremo il piano complesso così tagliato *foglio fisico* della superficie di Riemann. In accordo con la nostra definizione in tutto questo foglio abbiamo

$$\mathrm{Re}\sqrt{-E} > 0. \qquad (128,5)$$

In particolare, sul bordo superiore del taglio la grandezza $\sqrt{-E}$ così definita diventa $-i\sqrt{E}$[1]).

Nella (128,3) i fattori e^{ikr} ed e^{-ikr}, e con essi i due termini di χ, sono dello stesso ordine di grandezza; l'espressione asintotica della forma (128,3) è quindi sempre legittima. In tutto il resto del foglio fisico il primo termine nella (128,1) diminuisce esponenzialmente, e il secondo cresce per $r \to \infty$ (in forza della (128,5)). Quindi i due termini nella (128,1) risultano di diversi ordini di grandezza, e questa espressione, come forma asintotica della funzione d'onda, può risultare illegittima: un termine piccolo sul fondo di uno grande può risultare di una precisione inammissibile. Perché l'espressione (128,1) sia legittima, il rapporto del termine piccolo al grande non deve essere inferiore all'ordine di grandezza relativo dell'energia potenziale (U/E) che si trascura nell'equazione di Schrödinger nel passaggio alla regione asintotica. In altre parole, il campo $U(r)$ deve soddisfare la condizione: $U(r)$ decresce per $r \to \infty$ più rapidamente di

$$\exp\left(-\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} r\,\mathrm{Re}\sqrt{-E}\right). \qquad (128,6)$$

Se è soddisfatta questa condizione, l'espressione asintotica della forma (128,1) è valida in tutto il foglio fisico. Essendo soluzione di un'equazione con coefficienti finiti, essa non ha singolarità in E. Questo significa che le funzioni $A(E)$ e $B(E)$ sono regolari in tutto il foglio fisico, escluso il punto $E = 0$; quest' ultimo, come origine del taglio, è un punto di diramazione di queste funzioni.

Agli stati legati della particella nel campo $U(r)$ corrispondono le funzioni d'onda che si annullano per $r \to \infty$. Questo significa che il secondo termine nella (128,1) deve mancare, cioè ai livelli energetici discreti corrispondono gli zeri della funzione $B(E)$. Poiché l'equazione di Schrödinger ha solo autovalori reali, tutti gli zeri della $B(E)$ nel foglio fisico sono reali (e disposti sulla parte negativa dell'asse reale).

---

[1]) Dappertutto in questo paragrafo studieremo le proprietà dell'ampiezza di diffusione sul foglio fisico. In seguito, però, dovremo considerare in certi casi anche un secondo foglio *non fisico* della superficie di Riemann (vedi § 134). In questo foglio si ha

$$\mathrm{Re}\sqrt{-E} < 0. \qquad (128,5a)$$

Il passaggio dal semiasse positivo al foglio non fisico viene eseguito direttamente in basso, attraverso il taglio.

Le funzioni $A(E)$ e $B(E)$ per $E > 0$ sono legate direttamente all'ampiezza di diffusione nel campo $U(r)$. Infatti, confrontando la (128,3) con l'espressione asintotica di χ scritta nella forma (33,20)

$$\chi = \text{costante}\,[e^{i(kr+\delta_0)} - e^{-i(kr+\delta_0)}], \tag{128,7}$$

vediamo che

$$-\frac{A(E)}{B(E)} = e^{2i\delta_0(E)}. \tag{128,8}$$

Quanto all'ampiezza di diffusione con momento $l = 0$, essa, secondo la (123,15), è

$$f_0 = \frac{1}{2ik}(e^{2i\delta_0} - 1) = \frac{\hbar}{2\sqrt{-2mE}}\left(\frac{A}{B} + 1\right); \tag{128,9}$$

A e B sono presi sul bordo superiore del taglio.

Considerando ora l'ampiezza di diffusione come funzione di E in tutto il foglio fisico, vediamo che i livelli energetici discreti sono poli semplici dell'ampiezza. Se il campo $U(r)$ soddisfa la condizione (128,6), allora, in accordo con quanto detto sopra, l'ampiezza di diffusione non ha altri punti singolari[1]).

Calcoliamo il residuo dell'ampiezza di diffusione nel polo che essa ha in un certo livello energetico discreto $E = E_0 < 0$. Scriviamo a tale scopo le equazioni cui soddisfano la funzione χ e la sua derivata rispetto all'energia:

$$\chi'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\chi = 0, \quad \left(\frac{\partial\chi}{\partial E}\right)'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\frac{\partial\chi}{\partial E} = -\frac{2m}{\hbar^2}\chi.$$

Moltiplicando la prima per $\partial\chi/\partial E$ e la seconda per χ, sottraendo membro a membro l'una dall'altra e integrando in dr, otteniamo

$$\chi'\frac{\partial\chi}{\partial E} - \chi\left(\frac{\partial\chi}{\partial E}\right)' = \frac{2m}{\hbar^2}\int_0^r \chi^2\,dr. \tag{128,10}$$

Applichiamo questa relazione quando $E = E_0$ e $r \to \infty$. L'integrale nel secondo membro dell'uguaglianza diventa l'unità per $r \to \infty$, se la funzione d'onda dello stato legato è normalizzata con la condizione solita $\int \chi^2\,dr = 1$. Nel primo membro sostituiamo invece χ dalla (128,1), tenendo conto che nell'intorno del punto $E = E_0$ si ha

$$A(E) \approx A(E_0) \equiv A_0, \quad B(E) \approx (E + |E_0|)\left.\frac{dB}{dE}\right|_{E=E_0} \equiv \beta(E + |E_0|).$$

Otteniamo infine $\beta = -\dfrac{1}{A_0\hbar}\sqrt{\dfrac{m}{2|E_0|}}$.

[1]) Tranne il punto $E = 0$ che è singolare a causa della singolarità di cui sopra delle funzioni $A(E)$ e $B(E)$. Ma l'ampiezza di diffusione resta finita per $E \to 0$ (vedi § 132). Per brevità non ricorderemo in seguito questa restrizione.

Queste espressioni ci permettono di trovare che vicino al punto $E = E_0$ il termine principale nell'ampiezza di diffusione (coincidente con l'ampiezza per $l = 0$) ha la forma seguente:

$$f = -\frac{\hbar^2 A_0^2}{2m} \frac{1}{E + |E_0|}. \qquad (128,11)$$

In tal modo, il residuo dell'ampiezza di diffusione in un livello discreto è determinato dal coefficiente A_0 nell'espressione asintotica

$$\chi = A_0 \exp\left(-\frac{\sqrt{2m|E_0|}}{\hbar} r\right) \qquad (128,12)$$

della funzione d'onda normalizzata dello stato stazionario corrispondente.

Tornando allo studio delle proprietà analitiche dell'ampiezza di diffusione, consideriamo i casi in cui la condizione (128,6) non è soddisfatta. In tali campi, solo il termine crescente nell'espressione (128,1) partecipa correttamente alla forma asintotica della soluzione dell'equazione di Schrödinger in tutto il foglio fisico. Di conseguenza, si può affermare, come precedentemente, che la funzione $B(E)$ non ha singolarità.

Quanto alla funzione $A(E)$, essa può essere definita in queste condizioni nel piano complesso solo come prolungamento analitico di una funzione che rappresenta il coefficiente nell'espressione asintotica di χ sul semiasse reale positivo dove i due termini di χ sono legittimi. Ma questo prolungamento dà in generale risultati diversi a seconda che lo si faccia a partire dal bordo superiore o dal bordo inferiore del taglio. Per assicurare la monodromia conveniamo di definire $A(E)$ nel semipiano superiore e inferiore come il prolungamento analitico a partire, rispettivamente, dalla parte superiore e dalla parte inferiore del semiasse positivo; quanto al taglio, esso deve, in generale, essere esteso a tutto l'asse reale. La funzione così definita gode, come precedentemente, della proprietà $A(E^*) = A^*(E)$, ma, in generale, non è reale né a destra né a sinistra dell'asse reale. Essa può anche avere, in linea di principio, delle singolarità.

Mostriamo però che esiste, malgrado ciò, una categoria di campi per cui la funzione $A(E)$ non possiede delle singolarità all'interno del foglio fisico, benché la condizione (128,6) non sia soddisfatta.

Considereremo a questo scopo χ come funzione della variabile complessa r per un valore dato (complesso) di E. È sufficiente allora limitarsi ai valori di E nel semipiano superiore, in quanto i valori della funzione $A(E)$ in entrambi i semipiani sono complessi coniugati. Per i valori di r, per cui Er^2 è un numero reale positivo, i due termini della funzione d'onda (128,1) sono dello stesso ordine, cioè ritorniamo alla situazione che si presenta per $E > 0$ e per r reali, quando i due termini nell'espressione asintotica di χ sono legittimi

per un campo qualsiasi $U(r)$ tendente a zero all'infinito. Si può perciò affermare che $A(E)$ non può avere punti singolari per quei valori di E per cui $U(r) \to 0$, quando r tende verso l'infinito lungo il raggio in cui $Er^2 > 0$. Quando E prende tutti i valori nel semipiano superiore, la condizione $Er^2 > 0$ seleziona il quadrante inferiore destro del piano della variabile complessa r. In tal modo, arriviamo alla conclusione che $A(E)$ non ha singolarità all'interno del foglio fisico nei casi in cui $U(r)$ soddifa la condizione[1])

$$U(r) \to 0 \text{ quando } r \to \infty \text{ nel semipiano destro} \qquad (128,13)$$

(*L. D. Landau*, 1961).

Le condizioni (128,6) e (128,13) abbracciano una categoria molto ampia di campi. Su può quindi dire che l'ampiezza di diffusione non ha, come regola, delle singolarità nei due semipiani. Sul semiasse reale negativo (appartenente al foglio fisico in assenza di taglio su questo semiasse) l'ampiezza di diffusione ha dei poli corrispondenti alle energie degli stati legati; se vi è taglio, in essi possono trovarsi anche altre singolarità.

Quest'ultimo caso si ha, in particolare, per campi della forma

$$U = \text{costante} \cdot r^n e^{-r/a} \qquad (128,14)$$

(con n qualsiasi). Sul segmento $0 < -E < \hbar^2/8ma^2$ del semiasse negativo la condizione (128,6) è soddisfatta, cosicché non c'è bisogno di taglio, e l'ampiezza di diffusione ha qui solo dei poli corrispondenti agli stati legati. Sulla parte restante del semiasse negativo vi possono essere anche poli *superflui* e altre singolarità (*S. T. Ma*, 1946). La loro comparsa è dovuta al fatto che la funzione (128,14) cessa di tendere a zero, quando r tende all'infinito lungo il raggio sul quale $Er^2 > 0$, non appena E capita al di sotto del semiasse negativo (cioè il raggio indicato va a sinistra oltre l'asse immaginario del piano della variabile complessa r).

Consideriamo ora le proprietà analitiche dell'ampiezza di diffusione per $|E| \to \infty$. Quando $E \to +\infty$ lungo l'asse reale, è valida l'approssimazione di Born, e l'ampiezza di diffusione tende a zero. Secondo quanto detto prima, la stessa situazione si presenta quando E tende all'infinito nel piano complesso lungo una retta $\arg E = \text{costante}$, se si considerano valori complessi di r tali per cui $Er^2 > 0$. Se $U \to 0$ quando $r \to \infty$ lungo la retta $\arg r = -\frac{1}{2} \arg E$ e quando $U(r)$ non ha punti singolari su questa retta, allora la condizione di applicabilità dell'approssimazione di Born è soddisfatta,

---

[1]) Essendo $U(r)$ reale sull'asse reale, vale l'uguaglianza $U(r^*) = U^*(r)$; il fatto che la condizione (128,13) è soddisfatta nel quadrante inferiore destro significa quindi automaticamente che essa è soddisfatta in tutto il semipiano destro.

e l'ampiezza di diffusione tende, come prima, a zero. Quando arg E prende tutti i valori da 0 a π, arg r prende i valori da 0 a $-\pi/2$.

Arriviamo pertanto alla conclusione che l'ampiezza di diffusione tende a zero all'infinito in tutte le direzioni nel piano E se la funzione $U(r)$ non ha delle singolarità nel semipiano destro r e tende a zero all'infinito.

Anche se abbiamo sempre parlato sopra di una diffusione con momento $l = 0$, in realtà, però, tutti i risultati ottenuti sono validi anche per le ampiezze di diffusione parziali con qualsiasi momento diverso da zero. La sola differenza nel procedimento è che bisognerebbe scrivere in luogo dei fattori $e^{\pm ikr}$ nelle espressioni asintotiche di χ le funzioni d'onda radiali esatte del moto libero (33,16)[1].

Per $l \neq 0$ c'è da apportare qualche modifica nelle formule (128,9) e (128,11). Invece della (128,7) abbiamo ora

$$\chi_l = rR_l = \text{costante} \cdot \left\{ \exp\left[i\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right) \right] - \right.$$
$$\left. - \exp\left[-i\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right) \right] \right\} \qquad (128,15)$$

e per l'ampiezza parziale f_l (definita secondo la (123,15)) otteniamo

$$f_l = \frac{\hbar}{2\sqrt{-2mE}} \left[(-1)^l \frac{A}{B} + 1 \right]. \qquad (128,16)$$

Il termine principale nell'ampiezza di diffusione vicino al livello $E = E_0$ con momento l è dato, invece che dalla (128,11), dalla formula

$$f \approx (2l+1)\, f_l P_l(\cos\theta) =$$
$$= (-1)^{l+1} \frac{\hbar^2 A_0^2}{2m} \frac{1}{E + |E_0|} (2l+1)\, P_l(\cos\theta). \qquad (128,17)$$

§ 129. Relazione di dispersione

Abbiamo studiato nel paragrafo precedente le proprietà analitiche delle ampiezze di diffusione parziali con dati valori di l. Abbiamo visto che queste proprietà sono complicate dalla possibilità che appaiano singolarità « ridondanti » e irregolarità all'infinito. Le stesse proprietà ha, evidentemente, anche l'ampiezza totale considerata come funzione dell'energia per dati valori dell'angolo di diffusione. Un'eccezione è costituita dall'ampiezza di diffusione ad angolo zero. Come mostreremo ora, le sue proprietà analitiche sono molto piú semplici.

[1]) L'uso della forma limite (33,17) di queste funzioni è ammissibile solo per $E > 0$; nel resto del piano E, dove i due termini in χ sono di ordine di grandezza diverso, l'uso di queste espressioni limite introdurrebbe in χ un errore, in generale, piú grande dell'errore che si commetta trascurando U nell'equazione di Schrödinger.